

CUESTIONES Y PROBLEMAS, PROPUESTOS EN EXÁMENES

TEMA 5: MUESTREO. TEMA 6: ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Explique que es una muestra aleatoria simple.

Respuesta.- Sea X una variable aleatoria de una población, con función de distribución $F(x)$. Si las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, son independientes y tienen la misma función de distribución $F(x)$ que la variable X , entonces se dice que las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria simple de tamaño n

2. ¿Cuál es el objetivo de la estimación puntual? Razone la respuesta.

Respuesta.-

Obtener el valor de un parámetro poblacional desconocido mediante la elección de un estadístico muestral (estimador). Obtenida la muestra, el valor del estimador se utilizará como valor del parámetro poblacional.

3. Explique cual es el objetivo de la inferencia estadística.

Respuesta.-

El objetivo de la inferencia estadística es obtener información sobre el valor de algún parámetro poblacional, como por ejemplo la media o la varianza, o sobre la forma de la distribución de la variable aleatoria, como por ejemplo la función de densidad o de cuantía. Esta determinación se hace a partir de la información contenida en una muestra aleatoria

4.- Una agencia de viajes supone que el 70% de la población ha salido al extranjero de vacaciones en alguna ocasión. Con el objetivo de obtener una información más precisa toma una muestra aleatoria simple.

- a) Obtener la distribución muestral del estadístico correspondiente, para una muestra aleatoria de 90 personas y de 450 personas.
- b) Realizar la representación gráfica de las funciones de densidad del estadístico correspondiente, para ambas muestras.
- c) Explique los resultados obtenidos.

Solución.-

a) La hipótesis de la agencia supone que la proporción (poblacional) de personas que han salido al extranjero de vacaciones en alguna ocasión es 0,7. Para obtener una información más precisa de tal parámetro (es decir, para contrastar dicha hipótesis), tomaremos el estadístico proporción muestral :

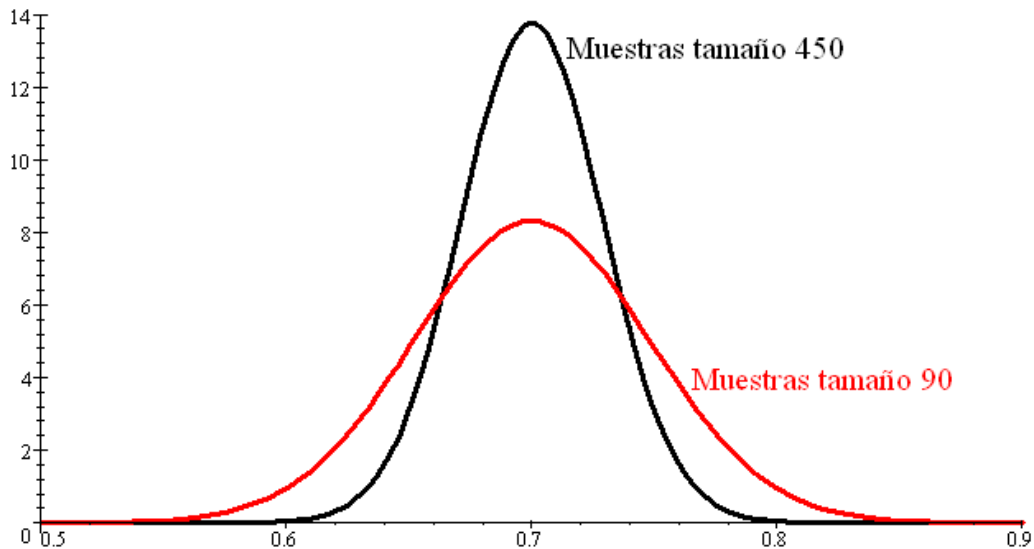
$$\hat{p} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de personas de la muestra que han salido al extranjero}}{\text{tamaño de la muestra}}$$

- Para muestras de 90 personas, $E[\hat{p}] = \frac{90 \cdot 0,7}{90} = 0,7$ y desviación típica de $\hat{p} = \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{90}} = 0,048$. Luego \hat{p} se distribuye aproximadamente normal $N(0,7; 0,048)$.

- De forma análoga, para muestras de 450 personas, \hat{p} se distribuye aproximadamente normal $N\left[0,7; \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{250}}\right] \cong N(0,7; 0,029)$

b) Las funciones de densidad son sendas campanas de Gauss con máximo en el punto de abscisa 0,7 y ordenada $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ cuyo valor es $\frac{1}{0,048\sqrt{2\pi}} \cong 8,31$ para muestras de tamaño 90

y $\frac{1}{0,029\sqrt{2\pi}} \cong 13,76$ para muestras de tamaño 450. Los puntos de inflexión tienen abscisas, en cada caso $0,7 \pm \sigma$.



c) Para un mismo nivel de significación, el tamaño de la región de aceptación es menor para muestras de tamaño 450 y por tanto más improbable cometer error de tipo II y en consecuencia el contraste efectuado con muestras de este tamaño tiene mayor potencia que el efectuado con muestras de tamaño 90.

5. Concepto de población, muestra y estadístico muestral. Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Población es el conjunto de individuos que son objeto del estudio estadístico, de forma que existe una variable aleatoria X asignando un número real a cada uno de los individuos de la población.

Una muestra, de tamaño n , es un conjunto de n observaciones de la variable aleatoria. $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$.

Un estadístico muestral es una función de las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ que componen la muestra.

Por ejemplo, una población puede ser el conjunto de clientes de unos grandes almacenes durante el año 2008, siendo X el gasto efectuado por cada cliente. Elegimos n clientes y anotamos sus respectivos gastos $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$. Un estadístico muestral sería por

ejemplo, la media muestral $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

6.-Una variable aleatoria se ha demostrado que sigue distribución normal con varianza de 2. Seleccionada una muestra aleatoria simple (X_1, \dots, X_n) con media \bar{X} :

a) Hallar el tamaño muestral necesario para que se verifique:
 $P(\mu - 0.30 < \bar{X} < \mu + 0.30) = 0.803$

Solución.-

La variable media muestral \bar{X} será normal $N\left(\mu, \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$, luego:

$$0,803 = P(\mu - 0,30 < \bar{X} < \mu + 0,30) = (\text{tipificando}) = P\left(\frac{-0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n} < Z < \frac{0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right).$$

Como $\frac{1-0,803}{2} = 0,0985 \rightarrow P\left(Z < \frac{0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right) = 0,803 + 0,0985 = 0,9015$. De las tablas

obtenemos que $\frac{0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n} = 1,29 \leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,29\sqrt{2}}{0,30} \cong 6,0811 \leftrightarrow n \cong 36,98$. Tomaremos pues $n = 37$.

7. Distribución de la media muestral cuando no se conoce la varianza poblacional. para una población normal.

8 -Sea X_1, X_2 y X_3 una muestra aleatoria simple de una población con media μ y varianza σ^2 . Si se consideran los siguientes estimadores puntuales de μ :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2X_1 + 2X_2 + 4X_3}{8} \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2 + 6X_3}{8}$$

- Compruebe si son estimadores insesgados de μ .
- ¿Cuál de los dos estimadores tiene menor varianza?

Solución.-

a) $E[\hat{\mu}_1] = \frac{2\mu + 2\mu + 4\mu}{8} = \mu$; $E[\hat{\mu}_2] = \frac{\mu + \mu + 6\mu}{8} = \mu$; luego ambos estimadores de μ son insesgados.

b) Sea $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$. Se tiene: $\text{Var}[\hat{\mu}_1] = \frac{4\sigma^2 + 4\sigma^2 + 16\sigma^2}{64} = \frac{24}{64}\sigma^2$;

$$\text{Var}[\hat{\mu}_2] = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + 36\sigma^2}{64} = \frac{38}{64}\sigma^2. \text{ Luego } \text{Var}[\hat{\mu}_1] < \text{Var}[\hat{\mu}_2]$$

9. Explique si existe diferencia entre parámetro poblacional y estadístico. Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Sí que existe diferencia.

Un parámetro poblacional es una característica numérica de la distribución de la población. Por ejemplo, si la función de probabilidad de una variable X de Poisson es

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \text{ cualquier valor de } \lambda > 0, \text{ proporciona una distribución de Poisson diferente.}$$

λ sería un parámetro poblacional.

Un estadístico es cualquier función real de las variables aleatorias que intervienen en una muestra. Por ejemplo, si la muestra es $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, un estadístico sería

$$\text{la media muestral } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

10.-¿Existe alguna diferencia entre la media muestral y la media poblacional?
Razone la respuesta.

Respuesta.-

Sea X una variable aleatoria. La media poblacional μ es el valor esperado de X , $E(X)$ que, dependiendo de que X sea discreta o continua, vale $E(X) = \sum_{\forall i} x_i \cdot P(X = x_i)$ o

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, respectivamente.

La media muestral, para muestras de tamaño n , sería la variable aleatoria $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, donde X_i es una variable aleatoria que se distribuye idénticamente igual que X , $\forall i$.