e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

ESTADÍSTICA II	SEPTIEMBRE 2010
Código de la Carrera 65	Código de la Asignatura 201

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Defina el concepto de variable aleatoria y ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Sea P la función de probabilidad definida para los sucesos de un determinado experimento aleatorio, siendo E su espacio muestral. Sea X: E $\rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que a cada suceso elemental le haga corresponder un número real y representemos por $[X \leq a]$ el suceso $\{x \in E / X(x) \leq a\}$. Diremos que X es una variable aleatoria si existe la probabilidad $P[X \leq x]$ para todo número real x. La función $F(x) = P[X \leq x]$ se denomina función de distribución.

Por ejemplo, se lanzan dos monedas equilibradas y definimos X como la variable aleatoria "número de caras". entonces X puede tomar los valores 0, 1, 2 y se cumple que:

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

2. Explique que expresa y para qué se utiliza el coeficiente de variación.

Respuesta.-

Si X es una variable aleatoria que toma valores positivos, siendo σ su desviación típica y μ su media, el coeficiente de variación es una medida de dispersión que expresa la razón de la desviación típica a la media, es decir $CV = \frac{\sigma}{\mu}$.

Si $CV \geq 1$, entonces se considera que la dispersión es grande y, por tanto, la media μ de la población no se considera representativa.

Por otra parte, sirve para comparar las dispersiones de variables X e Y en poblaciones diferentes, ya que se trata de una medida de dispersión relativa.

3. ¿Existe alguna diferencia entre la media muestral y la media poblacional? Razone la respuesta.

Respuesta.-

Sea X una variable aleatoria. La media poblacional μ es el valor esperado de X, E(X) que, dependiendo de que X sea discreta o continua, vale $E(X) = \sum_{\forall i} x_i \cdot P(X = x_i)$ o $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, respectivamente.

La media muestral, para muestras de tamaño n, sería la variable aleatoria $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, donde X_i es una variable aleatoria que se distribuye idénticamente igual que X, $\forall i$.

e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

4. ¿Existe alguna relación entre el error de tipo I y el error de tipo II? Explique la respuesta.

Respuesta.-

Para un tamaño fijo de la muestra n, al aumentar el nivel de significación α, que es la probabilidad de rechazar H_0 siendo falsa, (error de tipo I), disminuye la probabilidad β de aceptar H_0 siendo falsa (error de tipo II) y viceversa.

Si el tamaño de la muestra aumenta, es posible que α y β disminuyan, pero, para un nivel de significación α fijo, la probabilidad β de error de tipo II disminuye.

PROBLEMAS

1.- La variable aleatoria bidimensional (X,Y) son los beneficios de una empresa, procedentes de sus exportaciones a dos países diferentes. Sabiendo que X e Y son independientes, con medias de 4 y 6 millones de euros respectivamente y desviación típica 0´02 millones de euros en ambas. Se pide:

a) ¿Qué beneficio presenta menor coeficiente de variación? y ¿Cuál es su covarianza? Explique el resultado.
b) La esperanza de los beneficios totales: $X+Y$
c) La desviación típica de los beneficios totales: $X+Y$.
d) Explique qué sucede con la desviación típica si X e Y no son independientes.

Solución.-

a) Al ser las desviaciones típicas iguales, presenta menor coeficiente de variación la variable cuya media es mayor, esto es, la Y.

Dado que las variables son independientes, su covarianza es cero.

b) E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4 + 6 = 10 millones de euros.

c) Var (X+Y) = *(por ser independientes)* = Var(X) + Var(Y) = $0{,}02^2 + 0{,}02^2 = 0{,}0008$, de donde la desviación típica de X+Y será $\sqrt{0{,}0008} \cong 0{,}0283$ millones de euros.

d) $\mathrm{DT}(X+Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)}$

2.-Las ventas mensuales, de una marca de automóviles, en los concesionarios de la provincia de Toledo se distribuyen según una normal con media y desviación típica desconocidas. Se selecciona una muestra de 15 concesionarios, en los que se calcula que las ventas medias son 60.000 euros mensuales con una desviación típica muestral de 4.500 euros .Calcule para un nivel de confianza del 95%:

a) ¿Qué valores se pueden considerar como admisibles para las ventas medias anuales de los concesionarios de esta marca ubicados en la provincia?.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

Solución.-

La variable aleatoria $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ se distribuye t-Student con n–1 grados de libertad. Para 14 grados de libertad, encontramos en las tablas que el intervalo al 95% de nivel de confianza, es:

$$\left[\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \overline{x}+\frac{s}{\sqrt{15}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right]=\left[60000-\frac{4500}{\sqrt{15}}\cdot 2{,}145\ ,\ 60000+\frac{4500}{\sqrt{15}}\cdot 2{,}145\right]=$$

= [57507,74; 62492,26].

Suponiendo que la media mensual (poblacional) μ no varía en los 12 meses de un año, la media anual sería 12μ, luego se tendrá:
0,95 = P[57507,74 $\le \mu \le$ 62492,26] = *(multiplicando los tres miembros de la desigualdad por 12)* = P[690092,82 $\le 12\mu \le$ 749907,18]. Así pues, el intervalo de confianza para la ventas medias anuales sería [690092,82 ; 749907,18]