ESTADÍSTICA II	FEBRERO 2010 2ª semana
Código de la Carrera 65	Código de la Asignatura 201

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Defina y explique el concepto de valor esperado de una variable aleatoria.

Respuesta.-

Sea X = $\{x_i,\ i\in I\}$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(X = x_i) = p_i$. Se define el valor esperado de X:

$$E(X) = \sum_{i\in I} x_i p_i$$

si $\sum_{i\in I} x_i p_i$ es absolutamente convergente, es decir si $\sum_{i\in I} |x_i| p_i < +\infty$.

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f(x), se define el valor esperado:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

si la integral es absolutamente convergente, es decir si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < +\infty$.

2. Podemos afirmar que utilizando el método de los momentos obtenemos siempre estimadores insesgados. Explique la respuesta.

Respuesta.-

Sí, siempre que los parámetros a estimar sean momentos poblacionales respecto del origen. En efecto, el estimador del parámetro poblacional α_r será $\hat{\alpha}_r = \frac{1}{n}\sum X_i^r$, de donde $E(\hat{\alpha}_r) = \frac{1}{n}\sum E(X_i^r) = \frac{1}{n} n\alpha_r = \alpha_r$.

3. Explique si existe diferencia entre parámetro poblacional y estadístico. Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Sí que existe diferencia.

Un parámetro poblacional es una característica numérica de la distribución de la población. Por ejemplo, si la función de probabilidad de una variable X de Poisson es $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, cualquier valor de $\lambda > 0$, proporciona una distribución de Poisson diferente. λ sería un parámetro poblacional.

Un estadístico es cualquier función real de las variables aleatorias que intervienen en una muestra. Por ejemplo, si la muestra es $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, un estadístico sería la media muestral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

4. Explique en qué consiste un contraste de hipótesis paramétricas.

Respuesta.-

Consiste en confirmar o rechazar una determinada hipótesis efectuada sobre el valor de un parámetro poblacional desconocido de la distribución de una variable aleatoria. Para cierto estadístico, determinaremos el conjunto de valores que admitiremos para aceptar la hipótesis

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

(región de aceptación) y el conjunto complementario (región de rechazo). Para efectuar el contraste, se elige una muestra y se calcula el valor que proporciona para el estadístico en cuestión, lo que nos permite aceptar la hipótesis o bien rechazarla y, en su caso, aceptar una hipótesis alternativa.

PROBLEMAS

1.- El tiempo de conexión a Internet de los usuarios que tienen tarifa plana es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \textit{en el resto} \end{cases}$$

Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 10 conexiones se observaron las siguientes duraciones en minutos:

256	234	125	58	233	127	132	166	172	135

a) Obtenga el estimador del parámetro θ.
b) A partir de los datos muestrales, obtenga la estimación del parámetro θ.

Solución.-

Se da la circunstancia de que la función dada no es una función de densidad porque $\int_0^\theta \frac{1}{4\theta}\,dx = \frac{1}{4\theta}\int_0^\theta dx = \frac{\theta}{4\theta} = \frac{1}{4} \neq 1$. Por tanto el problema carece de sentido.

Si f(x) fuese una función de densidad, para determinar un estimador de θ, lo haríamos por el método de los momentos, igualando E(X), que se calcularía integrando entre 0 y θ el producto x·f(x), a la media muestral. De esa igualdad despejaríamos θ. Pero no es el caso.

2.-Un departamento de control de calidad ha llegado a la conclusión de que el 5% de los artículos fabricados tienen algún defecto. Extraída una muestra de 1000 artículos, se pide calcular:

a) La probabilidad de que la muestra contenga más de 48 artículos defectuosos.
b) Un lote de artículos es aceptado y puesto a la venta, si el número de de artículos defectuosos está comprendido entre 35 y 65. En caso contrario se rechaza. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote?.

Solución.-

La variable X = "número de artículos defectuosos de la muestra", se distribuye de forma binomial B(1000; 0,05) que es aproximadamente normal $N\left(50; \sqrt{47{,}5}\right) \cong N(50; 6{,}892)$. Luego:

a) P(X > 48) = *(corrección por continuidad)* = P(X ≥ 48,5) = $P\left(Z \geq \frac{-1{,}5}{6{,}892}\right) \cong$

≅ P(Z ≥ –0,22) = *(tablas)* = 0,5871.

b) P(35 ≤ X ≤ 65) = *(corrección por continuidad)* = P(34,5 ≤ X ≤ 65,5) =

$= P\left(\frac{-15{,}5}{6{,}892} \leq Z \leq \frac{15{,}5}{6{,}892}\right) \cong$ P(–2,25 ≤ Z ≤ 2,25) = *(tablas)* = 0,9756.