ESTADÍSTICA II	**ENERO 2010 1ª semana**
Código de la Carrera 65	**Código de la Asignatura 201**

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1.- ¿Cuándo podemos decir que una distribución de probabilidad es de tipo continuo? Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es de tipo continuo si existe una función no negativa f tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, para la cual se cumple que la función de distribución F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. La función f se llama función de densidad.

Ejemplo.- Sea X el tiempo en minutos entre dos repeticiones consecutivas de cierto fenómeno cuyo periodo de repetición oscila entre 5 y 15 minutos, siendo la función de densidad f(x) = $\frac{1}{10}$, para 5≤ x ≤ 15. Entonces, por ejemplo: F(7) = P(X ≤ 7) = $= \int_{\infty}^{7} \frac{1}{10}dx = \int_{5}^{7} \frac{1}{10}dx = \frac{2}{10} = 0{,}2$; F(12) = $\int_{5}^{12} \frac{1}{10}dx = \frac{7}{10} = 0{,}7$, etc.

2.- Explique la utilidad del la desigualdad de Chebychev.

Respuesta.-

La desigualdad de Chebychev, para una variable aleatoria X tal que E(X) = μ y Var(X) = σ^2, establece que

$$P[\,|X - \mu| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}, \quad \forall k > 0.$$

Si la aplicamos a la variable media muestral $\overline{X}$, para la que se cumple que E($\overline{X}$) = μ y Var($\overline{X}$) = $\frac{\sigma^2}{n}$, se escribiría:

$$P[\,|\overline{X} - \mu| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{nk^2}$$

desigualdad que permite establecer intervalos de confianza para μ, en poblaciones de las que se desconoce la distribución de la variable.

3.- Explique cuales son las distribuciones asociadas a la normal y para que se utilizan.

Respuesta.-

Consideremos las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ independientes y normales N(0, 1). Entonces la variable X = $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ se denomina χ^2, con n grados de libertad.

Consideremos las variables aleatorias $\{Y, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ independientes y normales N(0, 1). Entonces la variable $X = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}}}$ se denomina t-Student con n grados de libertad.

e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

Consideremos las variables aleatorias independientes U y V, ambas χ^2, con n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente. Entonces la variable aleatoria $X = \dfrac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$ se denomina F de Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad.

Tienen utilidad en los procesos de estimación pues son los modelos de distribución que siguen ciertos estimadores.

4.- Intervalo de confianza para una proporción. Explique cómo se interpreta.

Respuesta.-

Consideramos una población binomial B(1, p) para la que deseamos obtener un intervalo de confianza al nivel 100(1–α) % para el parámetro p. Tomamos una muestra aleatoria de tamaño n y sea X el número de éxitos. Usamos como estimador la proporción muestral $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Distinguimos dos casos según que n sea pequeño o grande.

Si n pequeño, hallaremos el intervalo por el método gráfico de Clopper y Pearson.

Si n es grande, $\hat{p}$ es entonces aproximadamente normal $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, y si, siendo Z normal N(0, 1) se cumple que $P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$, entonces $\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ es el intervalo de confianza buscado. Como p se desconoce, un intervalo aproximado es $\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

PROBLEMAS

1.- Se está realizando un estudio sobre la necesidad de que una línea de autobuses establezca una parada en la avenida H. Para ello se sabe que:

- Y_1 es el número de viajeros que llegan subidos en el autobús a la parada de la avenida H,
- Y_2 es el número de viajeros que se suben al autobús en la parada de la avenida H
- Y_3 es el número de viajeros que se bajan del autobús en parada de la avenida H.

Las distribuciones asociadas a éstas variables aleatorias Y_1, Y_2 y Y_3 son Normales independientes con las siguientes medias y varianzas:
$N(205, 1600)$, $N(125, 169))$, $N(150, 196))$

Si X .es el número de viajeros que salen montados de la parada de la avenida H. Calcular:

e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

a) La probabilidad de que menos de 100 viajeros salgan montados de la parada de la avenida H.
b) La probabilidad de que salgan más de 200 viajeros.
c) Con una probabilidad de 0,9015, calcular el número máximo de viajeros que salen de la parada montados en el autobús.

Solución.-

La variable X = $Y_1 + Y_2 - Y_3$ es normal $N\left(205+125-150, \sqrt{1600+169+196}\right) =$ = N(180; 44,33). Luego:

a) P[X<100] = *(tipificando)* = P[Z < –1,80] = *(tablas)* = 0,0359

b) P[X>200] = *(tipificando)* = P[Z > 0,45] = *(tablas)* = 0,3264

c) 0,9015 = P[X < x] = *(tipificando)* = $P\left[Z < \frac{x-180}{44{,}33}\right]$. De las tablas se obtiene que $\frac{x-180}{44{,}33} = 1{,}29$, de donde x = 237,1857 ≅ 237 viajeros.

2.-Sea $X_1, X_2\ y\ X_3$ una muestra aleatoria simple de una población con media μ y varianza σ^2.Si se consideran los siguientes estimadores puntuales de μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2X_1 + 2X_2 + 4X_3}{8} \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2 + 6X_3}{8}$$

a) Compruebe si son estimadores insesgados de μ.
b) ¿Cuál de los dos estimadores tiene menor varianza?.

Solución.-

a) $E[\hat{\mu}_1] = \frac{2\mu + 2\mu + 4\mu}{8} = \mu$; $E[\hat{\mu}_2] = \frac{\mu + \mu + 6\mu}{8} = \mu$; luego ambos estimadores de μ son insesgados.

b) Sea σ^2 = Var(X_i). Se tiene: $Var[\hat{\mu}_1] = \frac{4\sigma^2 + 4\sigma^2 + 16\sigma^2}{64} = \frac{24}{64}\sigma^2$; $Var[\hat{\mu}_2] = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + 36\sigma^2}{64} = \frac{38}{64}\sigma^2$. Luego $Var[\hat{\mu}_1] < Var[\hat{\mu}_2]$