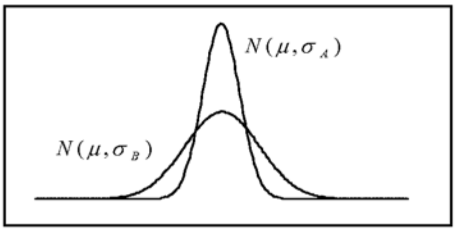
e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

CURSO 2008/2009.	SEPTIEMBRE RESERVA
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. En las dos funciones normales que se presentan, indicar cual tiene mayor varianza y explicar qué mide la varianza y como debe interpretarse.



Respuesta.-

Desde el punto de vista gráfico, la desviación típica de una distribución normal es la longitud del segmento cuyos extremos son las abscisas del máximo y de uno cualquiera de los puntos de inflexión de la función de densidad. En la figura se aprecia que $\sigma_B > \sigma_A$, luego la varianza $\sigma_B^2 > \sigma_A^2$.

La varianza $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ es una medida de la dispersión de la variable aleatoria. Cuanto mayor sea la varianza debemos interpretar que los valores de la variable están más alejados del valor medio μ.

2. Sabiendo, que una de las condiciones que debe verificar $f(x)$ para que sea una función de densidad de la variable aleatoria continua X, es que: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, explique el significado de dicha condición y el porqué de la misma.

Respuesta.-

La integral de la función de densidad f(x) en un intervalo [a, b] significa la probabilidad de que la variable aleatoria pertenezca a dicho intervalo. Puesto que el intervalo $]-\infty, +\infty[$ es el suceso seguro, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ significa la probabilidad del suceso seguro y, por lo tanto, debe ser igual a 1.

3. ¿Cuándo no podremos aproximar una distribución de Poisson a una Normal?

Respuesta.-

Si X es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, entonces la distribución de la variable $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ converge a la de una normal N(0,1), al aumentar λ. Se considera que la aproximación es buena para $\lambda \geq 10$ aunque también hay quien la considera aceptable para $\lambda > 5$.

Por tanto, siempre podríamos hacer la aproximación pero, si elegimos el primero de los dos criterios, no deberíamos hacerla si $\lambda < 10$.

4. ¿Cuándo un estimador es suficiente?

Respuesta.-

Un estimador $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es suficiente para un parámetro θ si la distribución de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ condicionada por T = t, no depende de θ.

e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

Intuitivamente significa que el estimador contiene toda la información que proporciona la muestra sobre el parámetro θ y que ningún otro estimador proporciona más información.

PROBLEMAS

1.- La ocupación en temporada alta por día en un hotel sigue una distribución uniforme de entre 200 a 250 camas. Se pide calcular:

a) La probabilidad de que un día la ocupación sea superior a 230 camas.

b) Calcular el porcentaje de días que tuvo una ocupación entre 215 y 240 camas.

c) Cacular la ocupación media y su desviación típica.

Solución.-

Como el nº X de camas es una variable discreta, efectuaremos una corrección por continuidad. En cualquier caso, si no se hiciese la corrección, los resultados serían similares:

La función de densidad será: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{51}, & 199{,}5 \le x \le 250{,}5 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$. Por tanto:

a) $P[X>230] = \int_{230,5}^{250,5} \frac{1}{51} dx = \frac{1}{51}[x]_{230,5}^{250,5} = \frac{20}{51} \cong 0{,}39.$

b) Calcularemos el porcentaje de ocupación entre 215 y 240 ambos inclusive: $P[215 \le X \le 240] = \int_{214,5}^{240,5} \frac{1}{51} dx = \frac{1}{51}[x]_{214,5}^{240,5} = \frac{26}{51} \cong 0{,}51$, es decir, el 51% de los días.

c) Se tiene que $\mu = \frac{a+b}{2}$ y $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$, luego $\mu = \frac{199{,}5 + 250{,}5}{2} = 225$ y $\sigma^2 = \frac{51^2}{12} = \frac{2601}{12} = 216{,}75 \rightarrow \sigma \cong 14{,}72$

2.- Sabiendo que los ingresos medios una discoteca en un fin de semana se distribuyen como una normal con desviación típica igual a 10.000 €. Se quiere obtener un intervalo al 95% de confianza para los ingresos medios una discoteca en un fin de semana y que estos estén acotados en ±6.000 €. ¿Qué tamaño muestral "n" necesitaríamos?

Solución.-

Entenderemos que son los ingresos X del fin de semana (no los ingresos medios) quienes se distribuyen de forma normal. Entonces la variable $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ se distribuye como una normal N(0, 1). Se tiene que:

$$0{,}95 = P\left[\left|\overline{X}-\mu\right| < 6000\right] = P\left[-6000 < \overline{X}-\mu < 6000\right] = P\left[-0{,}6\sqrt{n} < Z < 0{,}6\sqrt{n}\right]$$

y en las tablas de la normal N(0,1) encontramos que debe ser $0{,}6\sqrt{n} = 1{,}96$ de donde $n \cong 10{,}67$, por lo que tomaremos n = 11.