

CURSO 2008/2009.	SEPTIEMBRE.PRINCIPAL
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1 . Explique conceptualmente cual es la utilidad del Teorema Central del Límite.

Respuesta.-

Permite calcular probabilidades de una variable aleatoria S_n , suma de un número elevado de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, ya que el teorema establece que dicha suma se comporta aproximadamente como una variable Normal cuyas media y varianza son la suma, respectivamente, de las medias y varianzas de las variables aleatorias cuya suma es S_n .

2. Concepto de población, muestra y estadístico muestral. Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Población es el conjunto de individuos que son objeto del estudio estadístico. Entendemos por estudio estadístico la manera como se distribuye cierta característica numérica de los individuos (la variable aleatoria).

Una muestra de tamaño n es un subconjunto de n individuos de la población.

Si es X la variable aleatoria y observamos el valor de X en cada uno de los n individuos de la muestra, obtenemos un conjunto de n observaciones $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ obviamente variable, pues estos valores dependerán de la muestra elegida. Un estadístico muestral es cualquier función de estos valores $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Un ejemplo de población podría ser el conjunto de los alumnos de Estadística Empresarial de la UNED que se presentan a este examen. Consideraríamos como variable aleatoria la nota obtenida. Una muestra, tamaño n , sería cualquier conjunto de n alumnos de dicha población. Un estadístico muestral sería la media muestral, es decir, la nota media de los n alumnos de la muestra.

3 . ¿Qué relación existe entre la varianza muestral y la distribución χ^2 de Pearson?

Respuesta.-

Si S^2 es la varianza muestral (para una muestra de tamaño n), en una población con varianza poblacional σ^2 , entonces el estadístico $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ sigue una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad (teorema de Fisher).

4. ¿Cuál es el objetivo de un contraste de hipótesis? Razone la respuesta.

Respuesta.-

El objetivo es valorar si una determinada hipótesis estadística referida a una característica de la población es o no admisible, dentro de unos márgenes de probabilidad que nos fijamos de antemano. El contraste puede ser paramétrico o no paramétrico según lo sea la característica a contrastar. (Por ejemplo, un contraste sobre el valor de la media poblacional sería paramétrico y uno sobre la forma de la función de densidad. sería no paramétrico)

PROBLEMAS

1.- Las ventas medias de un restaurante de comida rápida son de 6000€ al día con una desviación típica de 120€. Se pide calcular con estos datos:

- La probabilidad de que las ventas medias diarias sean mayores de 6250€.
- Definir el menor intervalo de tal forma que contenga al menos el 95% de las ventas medias diarias.

Solución.-

La “venta media diaria” no es una variable aleatoria (es una constante pues son 6000 €). Supondremos entonces que las preguntas de los apartados a y b se refieren a las “ventas diarias”

a) Sea X la venta diaria. Al desconocer su distribución, aplicaremos la desigualdad de Chebychev para obtener una acotación superior de la probabilidad que se pide:

$$P[X > 6250] = P[X - 6000 > 250] < P[|X - 6000| > 250] < (\text{desigualdad de Chebychev}) < \left(\frac{120}{250}\right)^2 = 0,2304.$$

b) También por la desigualdad de Chebychev, $P[|X - 6000| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{120^2}{\varepsilon^2}$. Haciendo $1 - \frac{120^2}{\varepsilon^2} = 0,95 \rightarrow \varepsilon = 536,66$. Luego el intervalo es (5463,34 ; 6536,66)

2.- El gasto medio por hogar en España en Ocio, espectáculos y cultura para el año 2007 se distribuye según una Normal con desviación típica de 700 €. De una muestra aleatoria de 200 familias se obtuvo un gasto medio de 2.200€.

- Determinar los intervalos de confianza del 90% y del 95% para el gasto medio por hogar en Artículos de vestir y calzado.
- Calcular el tamaño de la muestra necesario para obtener un intervalo de confianza del 90%, para el gasto medio por hogar en Ocio, espectáculos y cultura, con una amplitud de 500€.

Solución.-

a) Determinaremos los intervalos de confianza para el gasto medio por hogar en Ocio, espectáculos y cultura. Tal intervalo tiene la forma: $\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Entonces:

- Para $\alpha = 0,1$, de las tablas $z_{\alpha/2} = 1,65$, luego el intervalo es $\left[2200 - 1,65 \frac{700}{\sqrt{200}}, 2200 + 1,65 \frac{700}{\sqrt{200}}\right] = [2118,33 ; 2281,67]$

- Para $\alpha = 0,05$, de las tablas $z_{\alpha/2} = 1,96$, luego el intervalo es $\left[2200 - 1,96 \frac{700}{\sqrt{200}}, 2200 + 1,96 \frac{700}{\sqrt{200}}\right] = [2102,98 ; 2297,01]$

b) Debe ser $1,65 \cdot \frac{700}{\sqrt{n}} = 250$, de donde $n = 21,34 \cong 21$.