

ESTADÍSTICA TEÓRICA II. Tercer curso de Economía
CURSO 2009/2010. CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE
Código de la Carrera 43 Código de la Asignatura 305.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES

- 1.- Definición de estimador consistente, consistente en media cuadrática y consistente casi seguro. Relación entre ellos.
- 2.- Función de potencia ideal.
- 3.- Lema de Neyman-Pearson
- 4.- Intervalo de confianza de una proporción para muestras pequeñas

PROBLEMAS

1.- Se tiene una población con función de densidad $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$ si $0 < x < 1$ e igual a cero en el resto de la recta real.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño $n=2$, determine, utilizando el lema de Neyman-Pearson, la mejor región crítica de tamaño $\alpha = 0,10$ para efectuar el contraste $H_0 : \theta = 1$, frente a la alternativa $H_1 : \theta = 2$

Solución.-

Aplicamos el lema de Neyman-Pearson:

$$\frac{L(\mathbf{x}, \theta = 1)}{L(\mathbf{x}, \theta = 2)} = \frac{x_1^0 \cdot x_2^0}{2x_1^1 \cdot 2x_2^1} = \frac{1}{4x_1 x_2} \leq K_1, \text{ de donde } x_1 \cdot x_2 \geq \frac{1}{4K_1}. \text{ Poniendo } K = \frac{1}{4K_1}, \text{ la mejor}$$

región crítica será de la forma $x_1 \cdot x_2 \geq K$.

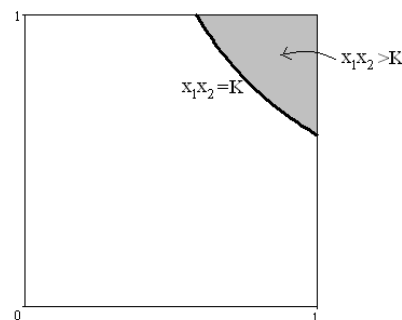
Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes e idénticamente distribuidas siendo su función de densidad respectiva, bajo la hipótesis nula, $f(x) = 1, 0 < x < 1$ y cero en el resto de la recta real, luego la función de densidad de la variable bidimensional (X_1, X_2) sería

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = 1, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, \text{ y cero en el resto del plano}$$

Así pues, para la mejor región crítica de tamaño $\alpha = 0,1$, se cumplirá:

$$\begin{aligned} 0,1 &= P[X_1 \cdot X_2 \geq K] = \iint_{x_1 \cdot x_2 \geq K} 1 \cdot dx_1 dx_2 = \int_K^1 \int_{\frac{K}{x_1}}^1 dx_2 dx_1 = \\ &= \int_K^1 [x_2]_{\frac{K}{x_1}}^1 dx_1 \int_K^1 \left(1 - \frac{K}{x_1}\right) dx_1 = [x_1 - K \ln x_1]_K^1 = \\ &= 1 - K + K \ln K, \text{ de donde } K(1 - \ln K) = 0,9. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $0 < K < 1$, podemos hallar un valor aproximado de K con la ayuda de la calculadora, obteniéndose que $K \cong 0,587$



2.- Dada una población definida por la función de densidad $f(x;\theta) = 2(\theta - x)\theta^{-2}$ en el intervalo $0 \leq x \leq \theta$ e igual a cero en el resto de la recta real.

- Determine, para muestras aleatorias simples de tamaño n y utilizando el método de los momentos, el estimador para el parámetro θ .
- Estudie la insesgadez, la eficiencia y la consistencia del estimador obtenido en el apartado anterior.

Solución.-

$$\text{a) Calculamos } E(X) = 2\theta^{-2} \int_0^\theta (\theta x - x^2) dx = 2\theta^{-2} \left[\frac{\theta x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^\theta = \frac{\theta}{3}$$

Igualemos $\frac{\theta}{3} = \bar{X}$, de donde $\hat{\theta} = 3\bar{X}$.

$$\text{b) } E(\hat{\theta}) = E(3\bar{X}) = 3E(\bar{X}) = 3E(X) = 3 \cdot \frac{\theta}{3} = \theta, \text{ luego } \hat{\theta} \text{ es insesgado.}$$

Estudie la eficiencia:

$$\text{Calculamos } \sigma^2. \text{ Tenemos que } E(X^2) = 2\theta^{-2} \int_0^\theta (\theta x^2 - x^3) dx = 2\theta^{-2} \left[\frac{\theta x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{6},$$

$$\text{de donde } \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^2}{9} = \frac{\theta^2}{18}.$$

$$\text{De aquí obtenemos } \text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}(3\bar{X}) = 9\text{Var}(\bar{X}) = 9 \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\theta^2}{2n}$$

Calculamos ahora la cota de Cramer-Rao:

$$\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln 2 + \ln(\theta - x) - 2 \ln \theta) = \frac{1}{\theta - x} - \frac{2}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-1}{(\theta - x)^2} + \frac{2}{\theta^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \int_0^\theta \left(\frac{-1}{(\theta - x)^2} + \frac{2}{\theta^2} \right) 2(\theta - x)\theta^{-2} dx = 2\theta^{-2} \int_0^\theta \left(\frac{-1}{(\theta - x)} + \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} \right) dx =$$

$$= 2\theta^{-2} \left[\ln|\theta - x| - \frac{(\theta - x)^2}{\theta^2} \right]_0^\theta = \infty.$$

Luego la cota de Cramer-Rao vale cero, y, por tanto $\hat{\theta}$ no es eficiente.