e-mail: imozas@elx.uned.es
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2009. EXAMEN RESERVA
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

PREGUNTAS TIPO TEST:

1.- De una baraja española de 40 cartas se extraen, sin reposición, 4. La probabilidad de que al menos 3 sean copas es:
a) ≅ 0’9584 **b)** ≅ 0’0416 **c)** ≅ 0’040 **d)** Ninguna de las anteriores

2.- Sean los sucesos A y B con P(A)= 0’3, P(A $\cap$ B) = 0’2 y P(B)= 0’6. ¿Cuál es la P($\overline{A} \cap \overline{B}$)?
a) 0’8 **b)** 0’3 **c)** 0’7 **d)** Ninguna de las anteriores

3.- El momento de orden uno respecto a la media de una variable aleatoria es igual a:
a) La esperanza **b)** La varianza **c)** Es cero **d)** Ninguna de las anteriores

4.- Sea ξ una variable aleatoria con $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, ¿cuál es la $\varphi(t)$ de la v.a. $\eta = 2 - \xi$?:

a) $\dfrac{e^{2it}}{1+t^2}$ **b)** $\dfrac{e^{it}}{1+t}$ **c)** $\dfrac{e^{it}}{1+t^2}$ **d)** Ninguna de las anteriores

5.- Sean ξ y η variables aleatorias con varianza σ^2 y coeficiente de correlación ρ, ¿cuál será la varianza de la media aritmética de las variables anteriores?

a) $\sigma^2/2$ **b)** $\dfrac{2+\rho}{2}\sigma^2$ **c)** $\dfrac{2+\rho}{4}\sigma^2$ **d)** Ninguna de las anteriores

6.- Sea ξ una variable aleatoria uniforme en el intervalo (0,1), la $E\left(1/\xi\right)$ es igual a:
a) 1 **b)** No existe **c)** 0 **d)** Ninguna de las anteriores

7.- El campo de variación de la χ^2_n es:
a) 0 a ∞ **b)** $-\infty$ a $+\infty$ **c)** 0 a n **d)** Ninguna de las anteriores

8.- Sea la variable aleatoria $\eta \equiv$N(2,3), ¿cuál es el valor de k para que P (k $\le \xi \le$ 2’3)=0’45?:
a) ≅ 0’5390 **b)** ≅ 0’2912 **c)** ≅ 0’0898 **d)** Ninguna de las anteriores

9.- Sea ξ una variable de Poisson con parámetro λ y P(ξ = 0)=1/2, ¿cuál es la varianza de ξ ?
a) 1/2 **b)** $0'69^2$ **c)** 0’69 **d)** Ninguna de las anteriores

10.- Se lanza 500 veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 270 caras?:
a) ≅ 0’9633 **b)** ≅ 0’0367 **c)** 0’8409 **d)** Ninguna de las anteriores

EJERCICIOS

1º.- El número medio de coches por minuto que entran en una ciudad un lunes es de 3,4,2,5 para cada una de las 4 carreteras de acceso a dicha ciudad. Suponiendo que siguen una distribución de Poisson en todas las carreteras, se pide:1) La probabilidad, para cada carretera, de que un lunes en un minuto entren 3 coches. 2) En la carretera de mayor tráfico, hallar la probabilidad de que un lunes entren entre 5 y 8 coches por minuto. 3) ¿Cuál es la probabilidad de que un lunes en 1 hora entren entre 800 y 1000 coches?.

Solución.-

1) Para la 1ª carretera: $P(\xi_1 = 3) = \dfrac{3^3}{3!}e^{-3} \cong 0{,}224$

Para la 2ª carretera: $P(\xi_2 = 3) = \dfrac{4^3}{3!}e^{-4} \cong 0{,}195$

Para la 3ª carretera: $P(\xi_3 = 3) = \dfrac{2^3}{3!}e^{-2} \cong 0{,}180$

Para la 4ª carretera: $P(\xi_4 = 3) = \dfrac{5^3}{3!}e^{-5} \cong 0{,}140$

2) $P(5 \le \xi_4 \le 8) = \left(\dfrac{5^5}{5!}+\dfrac{5^6}{6!}+\dfrac{5^7}{7!}+\dfrac{5^8}{8!}\right)e^{-5} \cong 0{,}4914$

3) Supuesto que las cuatro variables de Poisson son independientes, el número de coches que entra por minuto será una variable de Poisson P(14) y el número de coches que entra por hora será una variable ξ de Poisson P(840), que es aproximadamente normal $N\left(840, \sqrt{840}\right)$, luego $P(800 \le \xi \le 1000)$ = *(tipificando)* = $P\left(\dfrac{-40}{\sqrt{840}} \le Z \le \dfrac{160}{\sqrt{840}}\right) \cong P(-1{,}38 \le Z \le 5{,}52)$ = *(tablas)* =

= 1 – 0,0838 = 0,9162

2º.- De tres telefonistas que atienden una centralita en una empresa, la primera contesta el 50% de las llamadas y se equivoca en un 10%; la segunda atiende el 30% de las llamadas y se equivoca un 7% y la tercera telefonista se equivoca en el 5% de las llamadas que contesta. Si llamamos a dicha empresa: 1)¿cuál es la probabilidad que no hablemos con la persona deseada?. 2) ¿qué telefonista es más probable que nos haya atendido?.

Solución.-

Sea S_i el suceso "responde la telefonista i" (i = 1, 2, 3) y sea A el suceso "se produce una equivocación". Los datos del problema se pueden expresar: $P(S_1) = 0{,}5$; $P(A/S_1) = 0{,}1$; $P(S_2) = 0{,}3$; $P(A/S_2) = 0{,}07$; $P(S_3) = 0{,}2$; $P(A/S_3) = 0{,}05$.

1) Del teorema de la probabilidad total deducimos que

$$P(A) = 0{,}5\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}07 + 0{,}2\cdot 0{,}05 = 0{,}05 + 0{,}021 + 0{,}01 = 0{,}081$$

2) De las tres probabilidades $P(S_i/A)$, la mayor es $P(S_1/A)$ = *(teorema de Bayes)* = $\dfrac{0{,}05}{0{,}081} \cong$

$\cong 0{,}6173$, luego es más probable que nos haya atendido la primera.

Algunas aclaraciones a las preguntas tipo test.-

1) P(3 copas) + P(4 copas) = *(Fórmula de Laplace)* = $\dfrac{\binom{10}{3}\cdot 30}{\binom{40}{4}} + \dfrac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}} =$

$= \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 30\cdot 4 + 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37} \cong 0{,}04169.$

2) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 - 0{,}6 + 0{,}2 =$ $= 0{,}3.$

4) $\varphi_\eta(t) = E\left(e^{(2-\xi)ti}\right) = e^{2ti}E\left(e^{-\xi ti}\right) = e^{2ti}\varphi_\xi(-t) = \dfrac{e^{2ti}}{1+t^2}$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

5) $\mathrm{Var}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)=\frac{1}{4}\mathrm{Var}(\xi+\eta)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{Var}(\xi)+\mathrm{Var}(\eta)+2\mathrm{Cov}(\xi,\eta)\right)$. Como $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sigma^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \rho\sigma^2 \Rightarrow \mathrm{Var}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\sigma^2+\sigma^2+2\rho\sigma^2\right)= \frac{1+\rho}{2}\sigma^2$

6) Al ser (0,1) el dominio de la variable ξ, el dominio de la variable $\frac{1}{\xi}$ será $(1, +\infty)$. Por otra parte:

$$F_{\frac{1}{\xi}}(x)=P\left[\frac{1}{\xi}\le x\right]=P\left[\xi\ge\frac{1}{x}\right]=1-P\left[\xi<\frac{1}{x}\right]=1-F_\xi\left(\frac{1}{x}\right)$$

Derivando respecto de x para hallar la función de densidad de $\frac{1}{\xi}$:

$$f_{\frac{1}{\xi}}(x)=\frac{1}{x^2}f_\xi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2},\ \ 1<x<+\infty$$

Luego $E\left(\frac{1}{\xi}\right)=\int_1^\infty x\frac{1}{x^2}dx=\int_1^\infty\frac{1}{x}dx$ y esta integral es divergente.

8) $0{,}45 = P[k \le \xi \le 2{,}3]$ = *(tipificando)* = $P\left[\frac{k-2}{3}<Z<0{,}1\right]=F(0{,}1)-F\left(\frac{k-2}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow F\left(\frac{k-2}{3}\right)=F(0{,}1)-0{,}45=$ *(tablas)* = 1–0,4602 – 0,45 = = 0,0898. De las tablas obtenemos que debe ser $\frac{k-2}{3}\cong-1{,}345 \Rightarrow k\cong-2{,}035$

9) $\frac{1}{2}=P(\xi=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\Rightarrow \lambda=\ln 2\cong 0{,}69$

10) La variable "nº de caras" es binomial $B(500;\ 0{,}5) \cong N\left(500\cdot0{,}5;\sqrt{500\cdot0{,}5\cdot0{,}5}\right) \cong$ $\cong N(250;\ \sqrt{125})$. Luego $P(\xi \ge 270)$ = *(tipificando)* = $P\left(Z\ge\frac{20}{\sqrt{125}}\right)\cong P(Z\ge1{,}79)$ = *(tablas)* = = 0,0367.