e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2009. EXAMEN TIPO A
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

PREGUNTAS TIPO TEST:

1.-¿Cuál de las afirmaciones es cierta?: En una distribución de probabilidad la moda es:
a) Única **b)** El valor más probable **c)** El valor medio **d)** Ninguna de las anteriores

2.- Se lanza un dado trucado, tal que la probabilidad de cada cara es proporcional a su puntuación, ¿cuál es la probabilidad de que no salga el 6?
a) 5/6 **b)** 4/6 **c)** 5/7 **d)** Ninguna de las anteriores

3.- Sean los sucesos A y B con P(A) = 0'3, P(B) = 0'6 y P(A $\cap$ B) = 0'2. ¿Cuál es la P($\overline{A} \cup \overline{B}$)?
a) 0'3 **b)** 0'8 **c)** 0'7 **d)** Ninguna de las anteriores

4.- Dada la variable aleatoria ξ con media –3 y desviación típica 2. ¿Cuál es el límite inferior para P $\left[|\xi+3|<4\right]$?
a) 0'25 **b)** 0'50 **c)** 0'75 **d)** Ninguno de las anteriores

5.- En una distribución de probabilidad bidimensional ($\xi;\eta$) el momento μ_{10} es igual a:
a) $E(\xi)$ **b)** $E(\eta)$ **c)** Es igual a 0 **d)** Ninguno de las anteriores

6.- Sea ξ una variable con distribución de Bernouille de parámetro *p*. ¿Qué valor de *p* maximiza la V(ξ)?:
a) 1 **b)** – 1/2 **c)** 1/2 **d)** Ninguno de las anteriores

7.- La función característica de la v.a. bidimensional ($\xi;\eta$) es $\varphi(t_1 t_2)=\dfrac{e^{2(e^{it_1}-1)}}{e^{1-e^{it_2}}}$. ¿Cuál es la esperanza de las v.a. ξ y η?
a) $E(\xi)=2$ y $E(\eta)=2$ **c)** $E(\xi)=2$ y $E(\eta)=1$
b) $E(\xi)=1$ y $E(\eta)=1$ **d)** Ninguna de las anteriores

8.- Sea las variables aleatorias $\eta \equiv N(-8,2)$ y $\lambda \equiv N(-6,3)$. ¿Cuál es la distribución de la v.a.: $\gamma=\lambda-\eta$?:
a) N(2, $\sqrt{13}$) **b)** N(14, 5) **c)** N(2,5) **d)** Ninguna de las anteriores

9.-¿Qué Teorema Central del Límite exige que las variables sigan la distribución binomial?:
a) Lindeberg-Levy **b)** Lindeberg-Feller **c)** Moivre-Laplace **d)** Ninguno de las anteriores

10.- Dada la v. a. $\eta=N(-10,\sigma)$, ¿cuál es el valor de la varianza sabiendo que: $\left[|\eta+10|\le 5'12\right]=0'80$?:
a) 16 **b)** 16 **c)** 6'4 **d)** Ninguna de las anteriores

Algunas aclaraciones.-

2.- Si k es la constante de proporcionalidad, debe ser 1 = $\sum_{i=1}^{6} ki = k\sum_{i=1}^{6} i = 21k \leftrightarrow k=\dfrac{1}{21}$,

luego P(obtener 6) = $\dfrac{6}{21}$ y P(no obtener 6) = $1-\dfrac{6}{21}=\dfrac{15}{21}=\dfrac{5}{7}$

3.- $P\left[\overline{A}\cup\overline{B}\right]=P\left[\overline{A\cap B}\right]=1-P\left[A\cap B\right]=1-0{,}2=0{,}8$

4.- De la desigualdad de Chebychev $P\left[|\xi+3|<4\right]=P\left[|\xi-(-3)|<4\right]\ge 1-\dfrac{4}{16}=0{,}75$

e-mail: imozas@elx.uned.es
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

7.- $E(\xi) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\right)_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{2\left(e^{it_1}-1\right)}\cdot 2\cdot e^{it_1}\cdot i}{e^{1-e^{it_2}}}\right)_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = 2$

$E(\eta) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{2\left(e^{it_1}-1\right)}\cdot e^{1-e^{it_2}}\cdot e^{it_2}\cdot i}{e^{2\left(1-e^{it_2}\right)}}\right)_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = 1$

10.- Se sobreentiende que donde dice $\left[|\eta+10| \le 5{,}12\right]$ = 0,8 debe decir $P\left[|\eta+10| \le 5{,}12\right]$ = = 0,8. Se tiene:

0,8 = $P\left[|\eta+10| \le 5{,}12\right] = P\left[-5{,}12 \le \eta+10 \le 5{,}12\right] = P\left[\frac{-5{,}12}{\sigma} \le \frac{\eta+10}{\sigma} \le \frac{5{,}12}{\sigma}\right]$. La variable Z = $\frac{\eta+10}{\sigma}$ es normal N(0, 1), luego debe ser $P\left[Z > \frac{5{,}12}{\sigma}\right]$ = 0,1. De las tablas se obtiene que $\frac{5{,}12}{\sigma} = 1{,}28 \rightarrow \sigma = 4 \rightarrow \sigma^2 = 16$.

EJERCICIOS

1º.- Una variable aleatoria tiene la siguiente función de densidad: f(x) = k/x^2 para $1 \le x \le 2$ y 0 en el resto. Se pide calcular: 1) La mediana, el primer cuartil y el segundo decil de la distribución. 2) Los coeficientes de asimetría y de curtosis y explicar los resultados.

Solución.-

Hallemos k:

$$1 = \int_1^2 \frac{k}{x^2}dx = -k\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{k}{2} \rightarrow k = 2.$$

1) Sea ξ la variable aleatoria. Para la mediana Me, se cumple que $\frac{1}{2} = P[\xi \le Me] = \int_1^{Me}\frac{2}{x^2}dx$ = $= -2\left[\frac{1}{x}\right]_1^{Me} = 2\left(1-\frac{1}{Me}\right)$ de donde Me = $\frac{4}{3}$

Para el primer cuartil Q_1, se cumple que $\frac{1}{4} = P[\xi \le Q_1] = \int_1^{Q_1}\frac{2}{x^2}dx = 2\left(1-\frac{1}{Q_1}\right)$ de donde $Q_1 = \frac{8}{7}$

Para el segundo decil D_2, se cumple que $\frac{2}{10} = P[\xi \le D_2] = \int_1^{D_2}\frac{2}{x^2}dx = 2\left(1-\frac{1}{D_2}\right)$ de donde $D_2 = \frac{10}{9}$

2) Calculemos los momentos respecto del origen: $\mu = \alpha_1 = E(\xi) = \int_1^2\frac{2x}{x^2}dx = 2\left[\ln|x|\right]_1^2 =$ = 2ln2; $\alpha_2 = E(\xi^2) = \int_1^2 2dx = 2[x]_1^2 = 2$; $\alpha_3 = E(\xi^3) = \int_1^2 2xdx = \left[x^2\right]_1^2 = 3$; $\alpha_4 = E(\xi^4) =$ $= \int_1^2 2x^2dx = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{14}{3}$. Luego los momentos respecto de la media:

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

Varianza $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - 4\ln^2 2$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{2 - 4\ln^2 2}$.

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = 3 - 12\ln 2 + 16\ln^3 2$

$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = \dfrac{14}{3} - 24\ln 2 + 48\ln^2 2 - 48\ln^4 2$.

Tendremos entonces que:

Coeficiente de asimetría $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \dfrac{3 - 12\ln 2 + 16\ln^3 2}{\sqrt{\left(2 - 4\ln^2 2\right)^3}} \cong 0{,}486 \rightarrow$ la distribución es asimétrica positiva.

Coeficiente de curtosis $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{\frac{14}{3} - 24\ln 2 + 48\ln^2 2 - 48\ln^4 2}{\left(2 - 4\ln^2 2\right)^2} - 3 \cong -0{,}907 \rightarrow$ la distribución es platicúrtica.

2º.- Una marca de cereales incluye en algunos paquetes un vale canjeable por un regalo. Se ha estimado que el número de paquetes, premiados que se venden diariamente en un supermercado es una variable de Poisson de parámetro 0'5. Suponiendo independencia entre los paquetes, se pide: 1) La probabilidad de que en 100 días se vendan más de 40 paquetes premiados. 2) La probabilidad de que se vendan entre 50 y 60 paquetes premiados.

Solución.-

Sea ξ_i la variable aleatoria "nº de paquetes vendidos el día i-ésimo". Entonces la variable $\xi = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$ es de Poisson de parámetro 100·0,5 = 50, luego E(ξ) = 50 y Var(ξ) = 50. Del teorema central del límite podemos deducir que $\dfrac{\xi - 50}{\sqrt{50}}$ será aproximadamente normal N(0,1). Luego:

1) $P[\xi > 40] = P\left[\dfrac{\xi - 50}{\sqrt{50}} > \dfrac{-10}{\sqrt{50}}\right] \cong P\left[\dfrac{\xi - 50}{\sqrt{50}} > -1{,}41\right]$ = *(tablas)* = 1 – 0,0793 = 0,9207

2) $P[50 < \xi < 60] = P\left[0 < \dfrac{\xi - 50}{\sqrt{50}} < \dfrac{10}{\sqrt{50}}\right] \cong P\left[0 < \dfrac{\xi - 50}{\sqrt{50}} < 1{,}41\right]$ = *(tablas)* = 0,5 – 0,0793 = = 0,4207