

TEÓRICA I. JUNIO 2009. SEGUNDA SEMANA EXAMEN TIPO A
Código asignatura. 207. Código carrera 43.
PREGUNTAS TIPO TEST:

1.- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 puntos al lanzar un par de dados corrientes?:

- a) 1/6 b) 1/18 c) 5/6 d) Ninguna de las anteriores

2.- Cuál de las siguientes distribuciones no cumple la propiedad aditiva o reproductiva?:

- a) Poisson b) Binomial Negativa c) Geométrica d) Ninguna de las anteriores

3.- Sea las v.a $\lambda = 1/3 \sum_{i=1}^3 \xi_i^2$ y $\lambda = 1/5 \sum_{i=1}^5 \eta_i^2$ siendo ξ_i y $\eta_i = N(0, \sigma)$ e independientes, la v.a. $\omega = \lambda/\gamma$ se distribuye como una:

- a) $N(0, \sigma)$ b) t de Student c) F de Snedecor d) Ninguna de las anteriores

4.- Dados los sucesos A y B con $P(A) = 1/4$; $P(B/A) = 1/2$ y $P(A/B) = 1/4$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?:

- a) A y B son mutuamente excluyentes b) $P(\bar{A}/\bar{B}) = 3/4$
 c) $P(A/B) + P(\bar{A}/\bar{B}) = 1$ d) Ninguna de las anteriores

5.- Una v.a. η tiene una $\varphi(t) = e^{4it-2t^2}$ ¿cuál es la $P(\eta \leq -1)$?:

- a) 0'9938 b) 0'0668 c) 0'0062 d) Ninguna de las anteriores

6.- Dada una sucesión de variables aleatorias $\{\xi_n\}$ independientes e igualmente distribuidas se puede aplicar el teorema central del límite:

- a) Siempre b) Únicamente si $\xi_n \equiv N(\mu, \sigma) \forall n$ c) Nunca d) Ninguna de las anteriores

7.- Dada una variable aleatoria ξ cuyo campo de variación es $x \geq 5$, se puede afirmar:

- a) $E[\xi] \geq 5$ b) $E[\xi] > 5$ c) No existe $E[\xi]$ d) Ninguna de las anteriores

8.- La distribución logística

- a) Se utiliza para el estudio de las rentas personales y el campo de definición de x es $x > 0$
 b) Se utiliza para estudios demográficos y el campo de definición de x es $-\infty < x < +\infty$
 c) Se utiliza para el estudio de las rentas personales siendo x tal que $-\infty < x < +\infty$
 d) Ninguna de las anteriores

9.- Dada una v.a. $\eta = N(-10, \sigma)$, ¿cuál es el valor de la varianza para que: $P(|\eta + 10| \leq 5 \cdot 12) = 0'80$?:

- a) 4 b) 6'4 c) 16 d) Ninguna de las anteriores

10.- Dada la variable aleatoria $\eta \equiv N(2, \sigma)$ la $P\{\eta > 2\}$

- a) Depende del valor de σ b) No depende de σ
 c) Es igual a 0,0228 d) Ninguna de las anteriores

Algunas aclaraciones.-

$$4.- \text{Obtenemos } P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A/B)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ de donde } P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} =$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(\bar{B}/A)}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \text{ y finalmente } P(\bar{A}/\bar{B}) = 1 - P(A/\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

5.- $\varphi(t)$ es la función característica de una variable aleatoria normal $N(4, 2)$. Así pues, $P(\eta \leq -1) = P(Z \leq -2,5) = 0,0062$.

$$9.- P[|\eta + 10| \leq 5,12] = P[-5,12 \leq \eta + 10 \leq 5,12] = P\left[-\frac{5,12}{\sigma} \leq Z \leq \frac{5,12}{\sigma}\right] = F\left(\frac{5,12}{\sigma}\right) - F\left(-\frac{5,12}{\sigma}\right) = 2F\left(\frac{5,12}{\sigma}\right) - 1 = 0,8 \rightarrow F\left(\frac{5,12}{\sigma}\right) = \frac{1+0,8}{2} = 0,9. \text{ En las tablas encontramos que } \frac{5,12}{\sigma} = 1,28 \rightarrow \sigma = 4$$

EJERCICIOS

1º.- Una enfermedad puede ser producida por los virus A del cual hay 3 tubos, el virus B del que hay 2 tubos y el virus C con 5 tubos. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $P[|\xi| < 4]$, donde $\xi \equiv N(3,5)$; la de que la produzca el virus B es $P(\eta \geq 3)$, siendo $\eta = B(5,0,7)$ y la de que la produzca el virus C es $P(\lambda \leq 5)$, siendo una Poisson: $\lambda = P(4)$. Elegido un tubo al azar inyectado a un animal, éste desarrolla la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus sea del tipo C?

Solución.-

Sea A el suceso "el virus inyectado es A". Análogamente B y C. Sea E el suceso "se desarrolla la enfermedad". Los datos del problema son:

$$P(A) = 0,3.$$

$$P(B) = 0,2.$$

$$P(C) = 0,5.$$

$$P(E/A) = P[|\xi| < 4], \text{ siendo } \xi \text{ normal } N(3, 5), \text{ luego } P(E/A) = P[-4 < \xi < 4] = (\text{tipificando}) = P[-1,4 < Z < 0,2] = (\text{tablas}) = 1 - 0,4207 - 0,0808 = 0,4985.$$

$$P(E/B) = P[\eta \geq 3], \text{ siendo } \eta \text{ binomial } B(5; 0,7), \text{ luego } P(E/B) = \binom{5}{3} 0,7^3 \cdot 0,3^2 + \binom{5}{4} 0,7^4 \cdot 0,3 + \binom{5}{5} 0,7^5 \cong 0,8369.$$

$$P(E/C) = P[\lambda \leq 5], \text{ siendo } \lambda \text{ de Poisson } P(4), \text{ luego } P(E/C) = \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right) e^{-4} \cong 0,7851$$

$$\text{La probabilidad pedida es } P(C/E) = (\text{fórmula de Bayes}) = \frac{P(C) \cdot P(E/C)}{P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C)} = \frac{0,5 \cdot 0,7851}{0,3 \cdot 0,4985 + 0,2 \cdot 0,8369 + 0,5 \cdot 0,7851} \cong 0,5533$$

2º.- Sean ξ y η dos v.a. con función de densidad conjunta: $f(x,y) = ke^{-x}$, para $x > 0$; $x/2 \leq y \leq x$ y 0 en otro caso. Se pide: 1º) Hallar las funciones de distribución y de densidad marginales. 2º) $E(\eta/\xi)$ y $E(\xi/\eta)$ 3º) ¿Son las v.a. independientes?

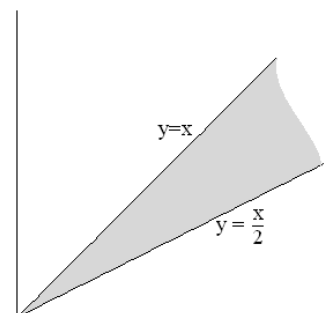
Solución.-

Hallemos el valor de k:

$$1 = k \int_0^{\infty} \int_{x/2}^x e^{-x} dy dx = \frac{k}{2} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \frac{k}{2} \Gamma(2) = \frac{k}{2}, \text{ luego } k = 2.$$

1º) Funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{x/2}^x 2e^{-x} dy = 2e^{-x} \left(x - \frac{x}{2}\right) = xe^{-x}, x > 0.$$



$$f_2(y) = \int_y^{2y} 2e^{-x} dx = -2[e^{-x}]_y^{2y} = 2(e^{-y} - e^{-2y}), y > 0.$$

Funciones de distribución marginales:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x te^{-t} dt, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -xe^{-x} - e^{-x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_0^y 2(e^{-t} - e^{-2t}) dt, & y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ -2e^{-y} + e^{-2y} + 1, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$2^\circ) E(\eta/\xi) = \frac{1}{f_1(x)} \int_{\frac{x}{2}}^x yf(x, y) dy = \frac{1}{xe^{-x}} \int_{\frac{x}{2}}^x 2ye^{-x} dy = \frac{1}{x} \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) = \frac{3}{4}x$$

$$E(\xi/\eta) = \frac{1}{f_2(y)} \int_y^{2y} xf(x, y) dy = \frac{1}{2(e^{-y} - e^{-2y})} \int_y^{2y} 2xe^{-x} dx = \frac{-2ye^{-y} - e^{-y} + y + 1}{1 - e^{-y}}$$

No son variables aleatorias independientes pues $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$.