e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2008. EXAMEN DE RESERVA
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

PREGUNTAS TIPO TEST:

1ª.- Dados dos sucesos A y B, con P(B) > 0, se verifica que:

a) P (A/B) = P ($\overline{A}$ / B) **b)** P(A/B) + P(B/A) = 1
c) $P(A/B) + P(\overline{A}/B) = 1$ **d)** Ninguna

2ª.- Si la v.a. ξ tiene una f(x) = 2x, para 0< x ≤ 1, la f(x) de la v.a. $\eta = 2\xi$ será:
a) 2y, si 0 <y ≤ 2 **b)** y/2, si 0 <y ≤ 2 **c)** y/2, si 0≤ y ≤ 1 **d)** Ninguna

3ª.- La probabilidad de que la v.a. $\xi \equiv N(0,1)$ quede fuera del intervalo (-1'2; 2'5) es:
a) ≅ 0'1213 **b)** ≅ 0'8787 **c)** ≅ 0'1089 **d)** Ninguna es correcta

4ª.- El tiempo de duración de un sistema automático sigue una distribución con f(x) = e^{-x}, si $x \geq 0$. Su función generatriz de momentos para t < 1, será:
a) $g(\theta) = 1 - t$ **b)** $g(\theta) = 1/e^{-t}$ **c)** $g(\theta) = 1/(1-t)$ **d)** Ninguna es cierta

5ª.- Dadas las variables aleatorias (v.a.) ξ y η, se verifica que:
a) $V(\xi - \eta) = V(\xi) + V(\eta)$ **b)** $V(\xi - \mu) = V(\xi) + V(\eta) - \text{cov.}(\xi, \eta)$
c) $V(\xi - \eta) = V(\xi) - V(\eta)$ **d)** Ninguna es cierta

6ª.- Dada una v.a. ξ con f(x) = cx^2 para $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es la $P(\xi > 1)$?:
a) 1/27 **b)** 26/27 **c)** 25/27 **d)** Ninguna es correcta

7ª.- La convergencia de una distribución binomial a una normal se consigue a partir del teorema de:
a) Moivre **b)** Chebychef **c)** Bernouille **d)** Ninguna es cierta

8ª.- El 25 por ciento del personal de una empresa es menor de 35 años, si se eligen 10 trabajadores al azar ¿ cuál es la probabilidad de que 6 sean menores de 35 años?:
a) ≅ 0'0512 **b)** ≅ 0'1459 **c)** ≅ 0'0162 **d)** Ninguna es cierta

9ª. -Dada una v.a. λ con f(x) = x^{-2}, para $1 \leq x < \infty$, su esperanza matemática será:
a) 0 **b)** 1 **c)** No existe **d)** Ninguna es cierta

10ª.- Dadas las v.a. independientes $\eta \equiv N(5,1)$ y $\lambda \equiv N(9,3)$, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria $\gamma = 2\eta - \frac{1}{2}\lambda$?:
a) N(7, 3) **b)** N(7, $\sqrt{3}$) **c)** N(7, $\sqrt{5}$) **d)** Ninguna

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1º.- Dada las variables aleatorias ξ y η con función de densidad conjunta f(x, y) = 2 si 0<y<x<1 y 0 en caso contrario. Se pide calcular: 1) Covarianza entre ξ y η. 2) El coeficiente de correlación. 3) E ($\xi + \eta$). 4) V($\xi + \eta$).

Solución.-
Las funciones de densidad marginales serían:

$$f_1(x) = \int_0^x 2dy = 2[y]_0^x = 2x \text{ , } 0 < x < 1$$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://personal.telefonica.terra.es/web/imm/

$$f_2(y) = \int_y^1 2dx = 2[x]_y^1 = 2(1-y),\ \ 0 < y < 1$$

Calculemos entonces los momentos:

$$\alpha_{11} = E(\xi\eta) = \int_0^1\int_0^x 2xydydx = \int_0^1 x\left[y^2\right]_0^x dx = \int_0^1 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_{10} = E(\xi) = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3};\ \alpha_{20} = E(\xi^2) = \int_0^1 2x^3dx = \frac{2}{4}\left[x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{01} = E(\eta) = \int_0^1 2y(1-y)dy = 2\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3};\ \alpha_{02} = E(\eta^2) = \int_0^1 2y^2(1-y)dy = 2\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

de donde obtenemos las varianzas:

$$V(\xi) = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = \frac{1}{2}-\frac{4}{9} = \frac{1}{18}\ ;\quad V(\eta) = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = \frac{1}{6}-\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

Así pues:

1) $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \alpha_{11} - \alpha_{10}\cdot\alpha_{01} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{36}$

2) Coeficiente de correlación $\rho = \dfrac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}}} = \dfrac{1}{2}$

3) $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta) = \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3} = 1$

4) $V(\xi + \eta) = V(\xi) + V(\eta) + 2\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{6}$

2º.- El tiempo que un artículo permanece en stok es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (1,7). De una producción de 100 de estos artículos se pide calcular la probabilidad de que el tiempo medio de permanencia en stok de los mismos sea mayor que 4’5.

Solución.-

Sea ξ_i la variable “tiempo de permanencia en el stok del artículo i-ésimo”, $1 \le i \le 100$. Se tiene que $E(\xi_i) = \dfrac{1+7}{2} = 4$ y $V(\xi_i) = \dfrac{(7-1)^2}{12} = 3$

Consideremos la variable $\eta = \dfrac{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}{100}$. Se cumple que $E(\eta) = \dfrac{100\cdot 4}{100} = 4$ y, suponiendo que las variables ξ_i son independientes, $V(\eta) = \dfrac{100\cdot 3}{10000} = \dfrac{3}{100}$. Por tanto, de acuerdo con el teorema central del límite, podemos considerar que η se distribuye aproximadamente normal $N\left(4, \dfrac{\sqrt{3}}{10}\right) \cong$ N(4; 0,1732). Así pues:

$P(\eta > 4{,}5)$ = *(tipificando)* = $P\left(Z > \dfrac{0{,}5}{0{,}1732}\right) \cong P(Z > 2{,}89)$ = *(tablas)* = 0,0019.