

ESTADÍSTICA II	ENERO 2009 1ª semana
Código de la Carrera 65	Código de la Asignatura 201

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1.- ¿Cuándo podemos decir que una distribución de probabilidad es de tipo discreto?

Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Cuando toma un número finito o infinito numerable de valores.

Por ejemplo, la variable aleatoria de Bernoulli, X , que toma los valores 0 ó 1, de forma que $P(X=1) = p$ y $P(X=0) = q = 1-p$.

2.- Explique la utilidad de la desigualdad de Chebychev.

Respuesta.-

La desigualdad de Chebychev, para una variable aleatoria X tal que $E(X) = \mu$ y $\text{Var}(X) = \sigma^2$, establece que

$$P[|X - \mu| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}, \quad \forall k > 0.$$

Si la aplicamos a la variable media muestral \bar{X} , para la que se cumple que $E(\bar{X}) = \mu$ y $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, se escribiría:

$$P[|\bar{X} - \mu| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{nk^2}$$

desigualdad que permite establecer intervalos de confianza para μ , en poblaciones de las que se desconoce la distribución de la variable.

3.- ¿Por qué es interesante calcular el coeficiente de variación?. Explique la respuesta.

Respuesta.-

El coeficiente de variación $CV = \frac{\sigma}{\mu}$, calculado en poblaciones donde la variable toma

valores positivos, tiene un doble interés:

- Por una parte si $CV \geq 1$, entonces se considera que la dispersión es grande y, por tanto, la media μ de la población no se considera representativa.

- Por otra parte, sirve para comparar las dispersiones de variables X e Y en poblaciones diferentes, ya que se trata de una medida de dispersión relativa.

4.- Explique el significado que tiene el nivel de significación en un contraste de hipótesis paramétrico.

Respuesta.-

El nivel de significación α es la probabilidad de cometer error de tipo I en los contrastes de hipótesis, es decir, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando es cierta. Es, por tanto, el tamaño de la región crítica.

PROBLEMAS

1.- Se supone que la rentabilidad de un producto ofrecido por una entidad bancaria es una variable aleatoria continua con distribución uniforme de media 5 % y recorrido de un 6%. Obtener:

- a) La función de densidad y de distribución de la variable aleatoria.
- b) La probabilidad de que la rentabilidad sea inferior al 5%.
- c) La probabilidad de que la rentabilidad sea exactamente un 7%.
- d) La varianza de la rentabilidad del producto.

Solución.-

a) Se tiene que $\left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{2} = 5 \\ b-a = 6 \end{array} \right\}$, de donde se obtiene que $a = 2$ y $b = 8$. Luego la función

de densidad: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 2 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$, y la de distribución $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x-2}{6}, & 2 \leq x < 8. \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$.

b) $P[X < 5] = F(5) = \frac{5-2}{6} = 0,5$.

c) $P(X=7) = 0$, por tratarse de una distribución continua.

d) $\text{Var}(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$

2.-Una variable aleatoria se ha demostrado que sigue distribución normal con varianza de 2. Seleccionada una muestra aleatoria simple (X_1, \dots, X_n) con media \bar{X} :

a) Hallar el tamaño muestral necesario para que se verifique:
 $P(\mu - 0,30 < \bar{X} < \mu + 0,30) = 0,803$

Solución.-

La variable media muestral \bar{X} será normal $N\left(\mu, \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$, luego:

$$0,803 = P(\mu - 0,30 < \bar{X} < \mu + 0,30) = (\text{tipificando}) = P\left(\frac{-0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n} < Z < \frac{0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right).$$

Como $\frac{1-0,803}{2} = 0,0985 \rightarrow P\left(Z < \frac{0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right) = 0,803 + 0,0985 = 0,9015$. De las tablas

obtenemos que $\frac{0,30}{\sqrt{2}}\sqrt{n} = 1,29 \leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,29\sqrt{2}}{0,30} \cong 6,0811 \leftrightarrow n \cong 36,98$. Tomaremos pues $n = 37$.