ESTADÍSTICA TEÓRICA I. JUNIO 2008. SEGUNDA SEMANA. EXAMEN TIPO A
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

PREGUNTAS TIPO TEST:

1ª.- La distribución más apropiada para el estudio de la distribución de las rentas personales es:
a) La logística b) La gamma c) La de Pareto d) Ninguna es correcta

2ª- Dados dos sucesos tales que $P(A) \leq P(B)$ se verifica que:
a) $A \subset B$ b) $A \cap B = \emptyset$ c) $A \cap B \neq \emptyset$ d) Ninguna es correcta.

3ª.- La función de densidad de una v.a. ξ verifica:
a) $0 < f(x)$ b) $0 \leq f(x) \leq 1$ c) $f(x) \leq 1$ d) Ninguna es correcta

4ª.- Si $\xi \equiv N(3,5)$ la mediana de esta distribución es
a) 3/5 b)3/2 c) 3 d) Ninguna es correcta

5ª.- La función de cuantía de una v.a. para un cierto valor x puede ser:
a) 0'2 b) -0'1 c) 2 d) Ninguna es correcta

6ª.- Dada la v.a. $\xi \equiv B(3, 0'3)$, entonces su función de distribución verifica
a) $F(4) < F(3)$ b) $F(4) > F(3)$ c) $F(4) = F(3)$ d) Ninguna es correcta

7ª.- La varianza no viene afectada por
a) Cambio de origen b) Cambio de escala
c) Cambio de origen y escala d) Ninguna es correcta

8ª.- Dada la v.a. $\xi \equiv N(5,3)$ se verifica que
a) $P(\xi \leq 5) = P(\xi \geq -5)$ b) $1 - P(\xi \leq -5) = P(\xi \leq 5)$
c) $P(P(\xi > 5) = P(\xi < 5)$ d) Ninguna de las anteriores

9ª.- Dada una sucesión de v.a. $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_n$, donde las ξ_i se distribuyen según una Poisson de parámetro $\lambda\ \forall i$, podemos asegurar que si la v.a. $\eta = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ su límite cuando $n \to \infty$ es :

a) $N(\lambda, \lambda)$ b) $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ c) $N(\frac{\lambda}{n}, \lambda)$ d) Ninguna es cierta

10ª.- Dada $\varphi(t) = \frac{1}{it}(e^{it} - 1)$ de una v.a. ξ, definida en (0,1). Dada la v.a. $\eta = -\xi + 1$, la $\varphi(t)$ de η será:

a) $\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{it}(e^{it} - 1)$ b) $\frac{1}{it}(e^{-it} - 1)$ c) $\frac{e^{t}}{it}(1 - e^{-it})$ d) Ninguna es correcta

Algunas aclaraciones.-

3ª) La función de densidad es una función <u>no negativa</u>, pero puede tomar el valor cero en algún punto. Es decir, $0 \leq f(x)$.

8ª) Se entiende que la respuesta es $P(\xi > 5) = P(\xi < 5)$

9ª) $E(\eta) = \lambda$ y, supuestas las variables ξ_i independientes, $Var(\eta) = \frac{\lambda}{n}$, luego, al crecer n, η tiende a distribuirse normal $N\left(\lambda, \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}\right)$

10ª) $$\varphi_\eta(t) = E\left(e^{it\eta}\right) = E\left(e^{it(1-\xi)}\right) = E\left(e^{it}.e^{-it\xi}\right) = e^{it}E\left(e^{-it\xi}\right) = e^{it}\varphi_\xi(-t) = e^{it}\frac{-1}{it}\left(e^{-it} - 1\right) =$$
$$= \frac{e^{it}\left(1 - e^{-it}\right)}{it} = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

EJERCICIOS

1ª.- Se tienen 100 dados, de los cuales 20 están cargados y la probabilidad de obtener el "1" en estos dados es el triple que la de las restantes puntuaciones. De entre los 100 dados se elige uno al azar, se lanza y sale la cara "1". Calcular la probabilidad de que el dado lanzado no esté cargado.

Solución.-

Entendemos que la probabilidad de obtener 1 es el triple que la de obtener cada una de las restantes puntuaciones. Sea C el suceso "elegir un dado cargado" y 1 el suceso "la cara obtenida es la 1". Si x es la probabilidad de obtener una cara distinta de 1 en un dado cargado, entonces la probabilidad de obtener 1 será 3x, luego 5x + 3x = 1, de donde x = $\frac{1}{8}$, luego P(1/C) = $\frac{3}{8}$ mientras que $P\left(1/\overline{C}\right)=\frac{1}{6}$. Además, P(C) = 0,2 y $P\left(\overline{C}\right)$ = 0,8.

Así pues, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(1) = P(C)\cdot P(1/C) + P\left(\overline{C}\right)\cdot P\left(1/\overline{C}\right) = = 0{,}2\cdot\frac{3}{8}+0{,}8\cdot\frac{1}{6}=\frac{0{,}6}{8}+\frac{0{,}8}{6}=\frac{10}{48}.$$

Luego, por el teorema de Bayes, la probabilidad de que, habiéndose obtenido un 1, el dado no estuviese cargado: $P\left(\overline{C}/1\right)=\frac{P\left(\overline{C}\right)P\left(1/\overline{C}\right)}{P(1)}=\frac{0{,}8\cdot\frac{1}{6}}{\frac{10}{48}}=0{,}64$

2º.-El número de pasajeros que toman el tren, entre dos ciudades, un fin de semana es una v. a. ξ con E(ξ) = 200 y V(ξ)= 100. Si cada vagón tiene capacidad para 40 viajeros, calcular el número de vagones necesarios para que con una probabilidad igual o superior a 0'95 se pueda atender la demanda de pasajeros entre ambas ciudades ese fin de semana.

Solución.-

$P[\xi \le 40n] = P[\xi-200 \le 40n - 200] \ge P[\,|\xi - 200| \le 40n - 200] \ge$ *(Tchebychev)* $\ge$

$\ge 1-\frac{100}{(40n-200)^2}$.

Tomando esta última expresión ≥ 0,95 garantizamos que $P[\xi \le 40n] \ge 0{,}95$. Tendremos:

$$1-\frac{100}{(40n-200)^2} \ge 0{,}95 \leftrightarrow \frac{100}{(40n-200)^2}\le 0{,}05 \leftrightarrow (40n-200)^2 \ge \frac{100}{0{,}05}=2000 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 40n-200 \ge 44{,}73 \leftrightarrow n \ge \frac{244{,}73}{40} \cong 6{,}12$$. Así pues bastaría con 7 vagones.