CURSO 2007/2008.	SEPTIEMBRE.RESERVA
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. En el cálculo de probabilidades de una variable discreta y continua ¿existen diferencias? Razone la respuesta.

Respuesta.-

Una diferencia significativa es que la probabilidad de que una variable tome un valor puntual es cero si es continua y no necesariamente cero si es discreta.

2. Concepto de población, muestra y estadístico muestral. Ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Población es el conjunto de individuos que son objeto del estudio estadístico. Entendemos por estudio estadístico la manera como se distribuye cierta característica numérica de los individuos (la variable aleatoria).

Una muestra de tamaño n es un subconjunto de n individuos de la población.

Si es X la variable aleatoria y observamos el valor de X en cada uno de los n individuos de la muestra, obtenemos un conjunto de n observaciones $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ obviamente variable, pues estos valores dependerán de la muestra elegida. Un estadístico muestral es cualquier función de estos valores $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Un ejemplo de población podría ser el conjunto de los alumnos de Estadística Empresarial de la UNED que se presentan a este examen. Consideraríamos como variable aleatoria la nota obtenida. Una muestra, tamaño n, sería cualquier conjunto de n alumnos de dicha población. Un estadístico muestral sería la media muestral, es decir, la nota media de los n alumnos de la muestra.

3. El Teorema de Chebychev. Explique su significado.

Respuesta.-

Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 finita. Entonces, para cualquier k > 0 se verifica: $P\left[|X-\mu| \geq k\right] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$.

Proporciona una cota superior para la probabilidad de que la distancia de un valor de la variable a su media supere a cierto número k. Una consecuencia es : $P\left[|X-E(X)| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$; por ejemplo, $P\left[|X-E(X)| \geq 2\sigma\right] \leq \frac{1}{4}$, $P\left[|X-E(X)| \geq 3\sigma\right] \leq \frac{1}{9}$, etc.

4. ¿Cuál es el objetivo de un contrate de hipótesis? Razone la respuesta.

Respuesta.-

El objetivo es valorar si una determinada hipótesis estadística relativa una característica de la población es o no admisible, dentro de unos márgenes de probabilidad que nos fijamos de antemano. El contraste puede ser paramétrico o no paramétrico según lo sea la característica a contrastar. (Por ejemplo, un contraste sobre el valor de la media poblacional sería paramétrico y uno sobre la forma de la función de densidad. sería no paramétrico)

PROBLEMAS

1.- Un estudio realizado establece que el número de hijos que tienen las parejas de 25-35 años viene dado por:

$$P(X = x, Y = y) = K(x + y) \qquad x = 1, 2, 3 \quad e \quad y = 1, 2$$

a) Calcular el valor de la constate K.
b) Poner las probabilidades en forma de tabla de doble entrada y hallar las correspondientes distribuciones de probabilidad marginales.
c) Calcular las distribuciones de probabilidad condicionadas para ambas variables.

Solución.-

a) Debe ser $1 = \sum_{\forall x, \forall y} P(X = x, Y = y) = K \sum_{\forall x, \forall y} (x + y) = K(2+3+3+4+4+5) = 21 \text{ K} \rightarrow$

$\rightarrow K = \dfrac{1}{21}$

b)

X \ Y	**1**	**2**	**$p_{i\cdot}$ = = P(X = i)**
1	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{5}{21}$
2	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{7}{21}$
3	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$
$p_{\cdot j}$ = = P(Y = j)	$\frac{9}{21}$	$\frac{12}{21}$	

c)

X	**P[X=i/Y=1]**	**P[X=i/Y=2]**
1	$\frac{2}{21} : \frac{9}{21} = \frac{2}{9}$	$\frac{3}{21} : \frac{12}{21} = \frac{3}{12}$
2	$\frac{3}{21} : \frac{9}{21} = \frac{3}{9}$	$\frac{4}{21} : \frac{12}{21} = \frac{4}{12}$
3	$\frac{4}{21} : \frac{9}{21} = \frac{4}{9}$	$\frac{5}{21} : \frac{12}{21} = \frac{5}{12}$

Y	**P[Y=j/X=1]**	**P[Y=j/X=2]**	**P[Y=j/X=3]**
1	$\frac{2}{21} : \frac{5}{21} = \frac{2}{5}$	$\frac{3}{21} : \frac{7}{21} = \frac{3}{7}$	$\frac{4}{21} : \frac{9}{21} = \frac{4}{9}$
2	$\frac{3}{21} : \frac{5}{21} = \frac{3}{5}$	$\frac{4}{21} : \frac{7}{21} = \frac{4}{7}$	$\frac{5}{21} : \frac{9}{21} = \frac{5}{9}$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

2.- Sea una variable aleatoria que se distribuye según $N(\mu, 3)$, donde la media es desconocida, y se quiere decidir entre la hipótesis $H_0: \mu = 110$ frente a la alternativa $H_1: \mu = 130$. Para ello se toma una muestra aleatoria simple de 81 observaciones y se establece la siguiente regla de decisión: "si $\overline{X} \geq 114$ rechazaremos H_0". Se pide:

a) Obtener los errores de tipo I y II.
b) Obtener la potencia del contraste.

Solución.-

a) Bajo la hipótesis nula H_0, $\overline{X}$ es normal $N\left(110, \frac{3}{9}\right)$, luego el error de tipo I:

$\alpha = P[\overline{X} \geq 114 / H_0 \text{ cierta}] =$ *(tipificando)* $= P\left[Z \geq \frac{4}{3} \cdot 9\right] = P[Z \geq 12] = 0$

Bajo la hipótesis alternativa H_1, $\overline{X}$ es normal $N\left(130, \frac{3}{9}\right)$, luego el error de tipo II

$\beta = P[\overline{X} < 114 / H_1 \text{ cierta}] =$ *(tipificando)* $= P\left[Z < \frac{-16}{3} \cdot 9\right] = P[Z < -48] = 0$

b) Potencia del contraste = $1 - \beta = 1$