

CURSO 2007/2008.	SEPTIEMBRE.PRINCIPAL
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Indicar las características que presentan los experimentos de Poisson.

Respuesta.-

- El número de sucesos que ocurren en un determinado intervalo (de tiempo o de espacio) es independiente del número de sucesos que ocurren en cualquier otro intervalo.

- La probabilidad de que un solo suceso ocurra en un intervalo muy pequeño es proporcional a la longitud del intervalo y no depende del número de sucesos que ocurran fuera de dicho intervalo.

- La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo muy pequeño es prácticamente nula.

2. Indicar la relación que existe entre una variable distribuida según una ji-cuadrado de Pearson y la distribución Normal.

Respuesta.-

Una variable aleatoria χ^2 (con n grados de libertad) es suma de cuadrados de n variables aleatorias normales $N(0, 1)$, independientes.

3. Indicar razonadamente cual es la distribución de la media muestral cuando se desconoce la varianza poblacional.

Respuesta.-

En una población normal con media μ conocida siendo \bar{X} y S la media muestral y la desviación típica muestral para muestras de tamaño n, se cumple que el estadístico $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$ sigue una distribución t-Student con n-1 grados de libertad.

4. Indicar si los estimadores obtenidos por el método de los momentos son eficientes o no. Razonar la respuesta.

Respuesta.-

En general, no son insesgados, luego no son eficientes.

PROBLEMAS

1.- El coste medio anual de de las hipotecas en España se distribuye como una normal con media 5.000 €. El porcentaje de hipotecas inferiores a 3.000 € anuales es del 15,87%. Calcular cual es el porcentaje de hipotecas comprendidas entre 2.000 y 4.000€ anuales.

Solución.-

Sea X la variable aleatoria “coste medio anual de las hipotecas en España”, que se distribuye normal $N(5000, \sigma)$. Sabemos que $0,1587 = P[X < 3000] = (\text{tipificando}) = P\left[Z < \frac{-2000}{\sigma}\right]$. De las tablas de la normal $N(0,1)$ obtenemos que $\frac{-2000}{\sigma} = -1,00 \rightarrow \sigma = 2000$.

Así pues, X es normal $N(5000, 2000)$. Luego $P[2000 < X < 4000] = (\text{tipificando}) = P[-1,5 < Z < -0,5] = (\text{tablas}) = 0,24$.

Luego el porcentaje pedido es del 24 %.

2.- La encuesta de presupuestos familiares refleja que el gasto medio de las familias españolas en artículos de vestir y calzado en el año 2006 sigue una distribución normal con desviación típica de 3330 euros.

- a) Se elige una muestra aleatoria de 25 familias, y la media muestral observada es de 1.500 euros, determinar el intervalo de confianza del 95% para el gasto medio de las familias.
- b) Según dicho intervalo ¿se podría aceptar que las familias en realidad gastan 1.950 euros? ¿y 5000?
- c) Si se desea obtener un intervalo de confianza al 90% para un gasto medio con una amplitud de 3000 euros, ¿Qué tamaño deberá tener la muestra seleccionada?

Solución.-

a) El intervalo de confianza es $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donde $\bar{x} = 1500$, $\sigma = 3330$,

$n = 25$ y para $1 - \alpha = 0,95$ obtenemos de las tablas de la normal $N(0, 1)$ que $z_{0,025} = 1,96$, luego:
 $1500 - 1,96 \cdot 666 < \mu < 1500 + 1,96 \cdot 666 \leftrightarrow 194,64 < \mu < 2805,36$

b) Efectuaremos el contraste:

$$H_0: \mu = 1950 \text{ €}$$

$$H_1: \mu \neq 1950 \text{ €}$$

a un nivel de significación de 0,05. La condición de aceptación es $-1,96 < \frac{\bar{X} - 1950}{3330} \cdot 5 < 1,96$
 $\leftrightarrow 644 < \bar{X} < 3255,36$. Luego podemos aceptar que $\mu = 1950 \text{ €}$ con el nivel de significación mencionado.

Efectuemos ahora el contraste:

$$H_0: \mu = 5000 \text{ €}$$

$$H_1: \mu \neq 5000 \text{ €}$$

al mismo nivel de significación 0,05. La condición de aceptación es $-1,96 < \frac{\bar{X} - 5000}{3330} \cdot 5 < 1,96$
 $\leftrightarrow 3694,64 < \bar{X} < 6305,36$. Luego no podemos aceptar que $\mu = 5000 \text{ €}$ con el nivel de significación mencionado.

c) De las tablas de la normal $N(0, 1)$ obtenemos que $0,9 = P[-1,65 < Z < 1,65]$. Para que la amplitud del intervalo sea 3000 €, debe ser:

$$-1500 < \bar{X} - \mu < 1500 \leftrightarrow -\frac{1500}{3330} \sqrt{n} < \frac{\bar{X} - \mu}{3330} \sqrt{n} < \frac{1500}{3330} \sqrt{n}. \text{ Como } \frac{\bar{X} - \mu}{3330} \sqrt{n} \text{ es normal}$$

$$N(0,1) \text{ deberá ser } \frac{1500}{3330} \sqrt{n} \geq 1,65 \leftrightarrow n \geq 13,42. \text{ Tomaremos pues } n = 14.$$