e-mail: imozas@elx.uned.es
http://telefonica.net/web/imm/

CURSO 2006/2007.	SEPTIEMBRE. Reserva
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Explique el concepto de variable aleatoria.

Respuesta.-

Sea P la función de probabilidad definida para los sucesos de un determinado experimento aleatorio, siendo E su espacio muestral. Sea X: E $\to \mathbb{R}$ una aplicación que a cada suceso elemental le haga corresponder un número real y representemos por $[X \leq a]$ el suceso $\{x \in E / X(x) \leq a\}$. Diremos que X es una variable aleatoria si existe la probabilidad $P[X \leq x]$ para todo número real x.

2. Indicar cual es la utilidad de la covarianza entre variables.

Respuesta.-

La covarianza proporciona una medida de la relación lineal de las dos variables en el siguiente sentido:

- en primer lugar, el signo: si es positiva, al aumentar el valor de x, aumenta el de y o al disminuir el valor de x disminuye el de y. Recíprocamente, si es negativa, al aumentar x disminuye y o al disminuir x aumenta y.

- en segundo lugar, su valor absoluto: a mayor dependencia lineal de las variables mayor valor de la covarianza y a menor dependencia, menor valor. Si las variables son independientes, la covarianza es cero, aunque el recíproco no es cierto.

3. Razone de forma intuitiva cuando un estimador es suficiente.

Respuesta.-

Un estimador $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es suficiente para un parámetro θ si la distribución de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ condicionada por $T = t$, no depende de θ.

Significa, de forma intuitiva que el estimador utiliza toda la información relevante contenida en la muestra sobre el parámetro a estimar y que ningún otro estadístico puede proporcionar más información sobre dicho parámetro

4. ¿Qué se entiende por nivel de significación de un contraste?

Respuesta.-

Siendo H_0 la hipótesis nula, el nivel de significación α es la probabilidad de rechazar H_0, en el caso de que sea cierta.

PROBLEMAS

1.- La ocupación en temporada alta por día en un hotel sigue una distribución uniforme de entre 200 a 250 camas. Se pide calcular:

a) La probabilidad de que un día la ocupación sea superior a 230 camas.
b) Calcular el porcentaje de días que tuvo una ocupación entre 215 y 240 camas.
c) Claclular la ocupación media y su desviación típica.

Solución.-

Puesto que la variable X = "camas ocupadas" es discreta, haciendo una corrección por continuidad consideraremos que la función de densidad es la uniforme en el intervalo [199,5; 250,5]. En cualquier caso, si no se hiciese la corrección, los resultados serían similares:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{51}, & 199{,}5 \leq x \leq 250{,}5 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

.

a) P[X > 230] = *(corrección por continuidad)* = P[X ≥ 230,5] = $\int_{230,5}^{250,5} \frac{1}{51} dx = \frac{20}{51} \cong$ $\cong 0{,}39$.

b) P[215 ≤ X ≤ 240] = *(corrección por continuidad)* = P[214,5 ≤ X ≤ 240,5] = $= \int_{214,5}^{240,5} \frac{1}{51} dx = \frac{26}{51} \cong 0{,}51$. El porcentaje pedido es de 51 %.

c) En la distribución uniforme $\mu = \frac{a+b}{2}$ y $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \to \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$. Así pues:

$$\mu = \frac{199{,}5 + 250{,}5}{2} = 225 \text{ y } \sigma = \frac{250{,}5 - 199{,}5}{2\sqrt{3}} = \frac{51}{2\sqrt{3}} \cong 14{,}72$$

2.- Se sabe que el gasto anual en publicidad de un grupo de empresas es una variable aleatoria cuya distribución no se conoce, con una desviación típica de 1.400 euros. Para llevar un control sobre este gasto, se selecciona una muestra aleatoria simple de 64 empresas pertenecientes al grupo. Calcule:

a) La probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, entre la media muestral y la media poblacional sea inferior a 300 euros.
b) El tamaño de la muestra para que la media muestral se encuentre a lo sumo a 300 euros de la media poblacional con una probabilidad del 95%

Solución.-

a) Al ser el tamaño de la muestra suficientemente grande, del teorema central del límite deducimos que la variable $\overline{X}$ se distribuye aproximadamente normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{8}\right) = N(\mu, 175)$ por lo que, tipificando, la variable $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{175}$ se distribuirá aproximadamente normal N(0, 1).

Luego $P\left[\left|\overline{X} - \mu\right| < 300\right] = P\left[\left|\frac{\overline{X} - \mu}{175}\right| < 1{,}71\right] = P[-1{,}71 < Z < 1{,}71] = 0{,}9128$

b) $0{,}95 = P\left[\left|\overline{X} - \mu\right| < 300\right] = P\left[\left|\frac{\overline{X} - \mu}{1400} \cdot \sqrt{n}\right| < \frac{300}{1400} \cdot \sqrt{n}\right] = P\left[|Z| < \frac{3\sqrt{n}}{14}\right] = 1 - 2 \cdot P\left[Z < -\frac{3\sqrt{n}}{14}\right] \leftrightarrow$

$\leftrightarrow P\left[Z < -\frac{3\sqrt{n}}{14}\right] = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$. De las tablas deducimos que $-\frac{3\sqrt{n}}{14} = -1{,}96 \leftrightarrow \sqrt{n} \cong 9{,}15$.

$\leftrightarrow n \cong 83{,}66$. Tomaremos n = 84.