

CURSO 2006/2007.	JUNIO. 2ª semana
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. ¿Cómo le afecta al Coeficiente de Variación los cambios de origen y de escala?

Respuesta.-

Teniendo en cuenta que $E(X+a) = E(X) + a$, $\text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$, $E(aX) = aE(X)$ y $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$ se tiene:

Cambio de origen: sea $Y = X + a \rightarrow CV_Y = \frac{\sigma_Y}{E(Y)} = \frac{\sigma_X}{E(X)+a} \neq \frac{\sigma_X}{E(X)} \rightarrow$ sí que se ve

afectado.

Cambio de escala: sea $Y = aX \rightarrow CV_Y = \frac{\sigma_Y}{E(Y)} = \frac{a\sigma_X}{aE(X)} = \frac{\sigma_X}{E(X)} \rightarrow$ no se ve afectado.

2. ¿Qué entendemos por muestra aleatoria simple?

Respuesta.-

Sea X una variable aleatoria, en una determinada población, con función de distribución $F(x)$. Las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, constituyen una muestra aleatoria simple de tamaño n de dicha población, si son independientes y su función de distribución es $F(x)$.

3. ¿Son eficientes los estimadores obtenidos por el método de los momentos? (razonar la respuesta).

Respuesta.-

Aunque en algunos casos (por ejemplo, cuando se quieren estimar momentos poblacionales) son insesgados, en general los estimadores obtenidos por el método de los momentos no son insesgados, por tanto no son eficientes.

4. ¿Cómo se comporta el error de tipo II cuando disminuye el error de tipo I si el tamaño de la muestra permanece fijo? ¿y si el tamaño de la muestra aumenta?

Respuesta.-

Si el tamaño de la muestra permanece fijo, entonces si disminuye la probabilidad de error de tipo I, aumenta la probabilidad de error de tipo II.

Si el tamaño de la muestra aumenta, entonces, para un nivel de significación α fijo, la probabilidad de error de tipo II disminuye

PROBLEMAS

1.- Dada una población $N(\mu,7)$, y los estimadores de la media poblacional μ , para muestras aleatorias simples de tamaño $n=3$:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

Se pide:

1. Comprobar si los estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son o no insesgados.
2. Calcular la varianza de ambos estimadores.
3. ¿Son ambos estimadores eficientes?

Solución.-

$$1. E(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{3}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)) = \frac{3\mu}{3} = \mu, \text{ luego } \hat{\theta}_1 \text{ es insesgado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\mu = \frac{13}{12}\mu, \text{ luego } \hat{\theta}_2 \text{ no es insesgado}$$

$$2. \text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{9}(\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3)) = \frac{3 \cdot 49}{9} = \frac{49}{3}$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}\text{Var}(X_1) + \frac{1}{9}\text{Var}(X_2) + \frac{1}{16}\text{Var}(X_3) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right)49 = \frac{2989}{144}$$

3. $\hat{\theta}_2$ no es eficiente por no ser insesgado.

Para comprobar si lo es $\hat{\theta}_1$, calcularemos el valor de la cota de Frechet-Cramer-Rao:

$$\frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}, \text{ siendo en este caso } \theta = \mu.$$

$$\text{Tenemos que } f(x, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \ln f(x, \mu) = \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial \ln f(x, \mu)}{\partial \mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2} \rightarrow \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(x, \mu)}{\partial \mu}\right)^2\right]} = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2\right]} = \frac{\sigma^4}{nE[(x-\mu)^2]} = \frac{\sigma^4}{n\sigma^2} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{49}{3} = \text{Var}(\hat{\theta}_1). \text{ Luego } \hat{\theta}_1 \text{ es eficiente.}$$

2.- Se selecciona una muestra aleatoria de 600 personas, preguntándoles si utilizan Internet en el trabajo, 240 de ellas responden afirmativamente. Se pide obtener un intervalo de confianza al nivel del 95% para estimar la proporción real de personas que usan Internet en el trabajo.

Solución.-

Siendo p la proporción poblacional y \hat{p} la proporción muestral, el intervalo de

confianza para p es: $\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$. En la tabla de la distribución normal

$N(0,1)$, para una probabilidad 0,95 encontramos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$, luego el intervalo sería:

$$\left[\frac{240}{600} - 1,96 \sqrt{\frac{\frac{240}{600} \left(1 - \frac{240}{600}\right)}{600}}, \frac{240}{600} + 1,96 \sqrt{\frac{\frac{240}{600} \left(1 - \frac{240}{600}\right)}{600}} \right] \cong [0,36 ; 0,44]$$