e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

ESTADÍSTICA TEÓRICA II. Tercer curso de Economía
CURSO 2006/2007. CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE
Código de la Carrera 43 Código de la Asignatura 305.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Explique conceptualmente para qué se puede utilizar la función de distribución empírica de la muestra.

Respuesta.-

La función de distribución empírica de la muestra $F_n(x)$, converge en probabilidad a la función de distribución de la población, al aumentar el tamaño de la muestra. Luego su gráfica puede utilizarse para determinar la forma general de la distribución poblacional

2. ¿Qué entendemos por muestra aleatoria simple?.

Respuesta.-

Dada una variable aleatoria X, con función de distribución F(x), se denomina muestra aleatoria simple de tamaño n al conjunto de n variables X_1, X_2, …., X_n independientes, cada una de ellas distribuida idénticamente igual que la variable X.

3. Clasifique los resultados posibles de la decisión tomada en un contraste de hipótesis, utilizando la información proporcionada por una muestra, respecto de la naturaleza de la hipótesis nula. Razone la respuesta.

Respuesta.-

La hipótesis nula H_0 puede ser verdadera o falsa. Pueden entonces presentarse los siguientes resultados:

	H_0 verdadera	**H_0 falsa**
Aceptamos H_0	Decisión correcta	Error de tipo II
Rechazamos H_0	Error de tipo I	Decisión correcta

4. ¿En qué contrastes podemos utilizar el estadístico χ^2 de Pearson? ¿Para qué se utiliza?.

Respuesta.-

En contrastes sobre la varianza σ^2 de una población normal $N(\mu, \sigma)$ con μ desconocida. El estadístico $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye como una χ^2 con n–1 grados de libertad. Lo utilizamos para determinar la región crítica (y la de aceptación) para un nivel de confianza α dado. Por ejemplo, si el contraste es :

$$H_0\text{: } \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1\text{: } \sigma^2 = \sigma_0^2$$

entonces la región crítica viene definida por las desigualdades $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\, \alpha/2}$ o $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1,\, 1-\alpha/2}$.

e-mail: imozas@elx.uned.es
www.telefonica.net/web/imm

PROBLEMAS

1.-Sea X_1, X_2, X_3 una muestra aleatoria simple procedente de una población con media μ y varianza σ^2. Se consideran como posibles estimadores de μ los estadísticos:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{8}(2X_1 + 2X_2 + 4X_3)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + 6X_3)$$

Se pide:

a) Comprobar si los estimadores $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ son o no insesgados.

b) ¿Cuál de los dos estimadores tiene menor varianza?

Solución.-

a) $E(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{8}(2E(X_1) + 2E(X_2) + 4E(X_3)) = \frac{1}{8}(2\mu + 2\mu + 4\mu) = \mu \rightarrow \hat{\mu}_1$ es insesgado.

$E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{8}(E(X_1) + E(X_2) + 6E(X_3)) = \frac{1}{8}(\mu + \mu + 6\mu) = \mu \rightarrow \hat{\mu}_2$ es insesgado.

b) $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{64}(4\mathrm{Var}(X_1) + 4\mathrm{Var}(X_2) + 16\mathrm{Var}(X_3)) = \frac{24}{64}\sigma^2$

$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{64}(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 36\mathrm{Var}(X_3)) = \frac{38}{64}\sigma^2$

Luego $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\mu}_2)$

2.- Sea una variable aleatoria que se distribuye según $N(\mu, 3)$, donde la media es desconocida, y se quiere decidir entre la hipótesis $H_0: \mu = 110$ frente a la alternativa $H_1: \mu = 130$. Para ello se toma una muestra aleatoria simple de 81 observaciones y se establece la siguiente regla de decisión: "si $\overline{X} \geq 114$ rechazaremos H_0".

Se pide:

a) Obtener los errores de tipo I y II.

b) Obtener la potencia del contraste.

Solución.-

a) Error de tipo I = P[Rechazar H_0/H_0 verdadera] = $P[\overline{X} \geq 114/\mu = 110]$ = (*como* $\overline{X}$ *sería normal* $N\left(110, \frac{1}{3}\right)$) = $P\left[Z \geq \frac{4}{1/3}\right] = P[Z \geq 12] \cong 0$.

Error de tipo II = P[Aceptar H_0/H_1 verdadera] = $P[\overline{X} < 114/\mu = 130]$ = (*como* $\overline{X}$ *sería normal* $N\left(130, \frac{1}{3}\right)$) = $P\left[Z < \frac{-16}{1/3}\right] = P[Z < -48] \cong 0 = \beta$.

b) Potencia del contraste = $1 - \beta \cong 1$