| **CURSO 2006/2007.** | **SEPTIEMBRE.PRINCIPAL** |
|---|---|
| **Código de la Carrera 42** | **Código de la Asignatura 209.** |

**PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES**

**1.** Indicar las diferencias entre: función de densidad, de cuantía y de distribución.

**Respuesta.-**

Si X es una variable aleatoria, se define la función de distribución F: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / $F(x) = P[X \leq x]$.

Si X es discreta y toma los valores $\{x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, r\}$, se define la función de cuantía o de probabilidad $P(x_i) = P[X = x_i]$. Se cumple que $F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$.

Si X es continua y f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de densidad, se cumple que $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$ y $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

**2.** Explique qué condiciones debe cumplir una función f(x) de una variable aleatoria continua X para que se la pueda considerar como función de densidad.

**Respuesta.-**

Debe ser:

1) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

**3.** Explique brevemente cual es la utilidad del teorema de Moivre.

**Respuesta.-**

Permite calcular probabilidades para una variable aleatoria binomial B(n, p) cuando n es muy grande, utilizando la distribución normal ya que establece que, cuando n tiende a infinito, la variable aleatoria binomial B(n, p) tiende a comportarse como una variable aleatoria normal $N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.

**4.** ¿Qué diferencia existe entre los estimadores obtenidos por el método de los momentos y los obtenidos por el método de máxima verosimilitud?

**Respuesta.-**

En condiciones bastante generales, los estimadores obtenidos por el método de los momentos son consistentes, asintóticamente normales y, en general, no son insesgados (sí lo son si se pretende estimar momentos poblacionales respecto del origen). Por tanto, en general no son eficientes.

Los obtenidos por el método de la máxima verosimilitud son consistentes, no son en general insesgados, pero entonces son asintóticamente insesgados. Son asintóticamente eficientes y asintóticamente normales.

**PROBLEMAS**

**1.-** Se ha evaluado, a través de un test de seguimiento, el comportamiento de los vendedores de nuestra empresa. Las puntuaciones obtenidas van de 0 a 10, la nota media fue de 6,7 y la desviación típica de 1,2. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determinar:

**a).-** El porcentaje de vendedores que sacaron entre 5 y 6.

**b).-** La puntuación máxima del 10% más bajo.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
**http://telefonica.net/web/imm/**

**c). -** La nota mínima del 10% más alto.

**Solución.-**

Sea X la variable aleatoria "puntuación obtenida".

**a)** P[5 ≤ X ≤ 6] = *(tipificando)* = $P\left[\frac{5-6,7}{1,2} \le Z \le \frac{6-6,7}{1,2}\right]$ = P[–1,42 ≤ Z ≤ –0,58] = = *(tablas)* = 0,2810 – 0,0778 = 0,2032 . Porcentaje aproximado un 20%.

**b)** Sea x la puntuación buscada. Se tiene 0,1 = P[0 ≤ X≤ x] = *(tipificando)* = = $P\left[\frac{-6,7}{1,2} \le Z \le \frac{x-6,7}{1,2}\right] = P\left[-5,58 \le Z \le \frac{x-6,7}{1,2}\right] \cong P\left[Z \le \frac{x-6,7}{1,2}\right]$ ya que la probabilidad P[ Z < –5,58] ≅ 0. De las tablas se obtiene que $\frac{x-6,7}{1,2} = -1,28$ y de aquí x = 5,164

**c)** Sea x la nota mínima que se busca. Se tendrá: 0,1 = P[x ≤ X≤ 10] = *(tipificando)* = = $P\left[\frac{x-6,7}{1,2} \le Z \le \frac{10-6,7}{1,2}\right] = P\left[\frac{x-6,7}{1,2} \le Z \le 2,75\right] \cong P\left[\frac{x-6,7}{1,2} \le Z\right]$ ya que la probabilidad P[ 2,75 < Z ] = 0,003 ≅ 0. De las tablas se obtiene que $\frac{x-6,7}{1,2} = 1,29$ y de aquí x = 8,248

**2.-** Si se desea estimar la renta media, μ, en un distrito de una gran ciudad, utilizando la media muestral como estimador de μ y asegurándonos de que el error cometido en la estimación no es mayor de 350 unidades monetarias (u.m.) con probabilidad 0,95. ¿Cual sería el tamaño mínimo de la muestra que deberíamos elegir si se sabe que la desviación típica de la población es de σ = 3.500 u.m.?.

**Solución.-**

La esperanza de la variable media muestral $\overline{X}$ es μ y la desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3500}{\sqrt{n}}$. De la desigualdad de Chebychev, tendremos:

$$P\left[\left|\overline{X}-\mu\right| \le 350\right] \ge 1 - \frac{3500^2}{n350^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

Así pues, garantizamos que $P\left[\left|\overline{X}-\mu\right| \le 350\right]$ es 0,95 o mayor, tomando $1-\frac{100}{n} \ge 0,95$ de donde se obtiene que n ≥ 2000.