e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

CURSO 2004/2005.	**SEPTIEMBRE. Reserva.**
Código de la Carrera 42	**Código de la Asignatura 209.**

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Razone porqué se puede obtener la distribución de Poisson como límite de la distribución Binomial.

Respuesta.-

Consideremos una variable aleatoria binomial B(N, p) y supongamos que $p \to 0$ cuando $n \to \infty$, de forma que $\lambda = np$ permanezca constante. Puede entonces demostrarse que $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, que es la función de probabilidad de Poisson.

2.- ¿Qué es una hipótesis estadística? ¿Qué es la hipótesis nula? Razone la respuesta.

Respuesta.-

Una hipótesis estadística es cualquier afirmación sobre una característica desconocida de una población. Tal característica puede ser un parámetro (contraste paramétrico) o la forma de la función de probabilidad o densidad (contraste no paramétrico).

Se llama hipótesis nula la que se acepta, provisionalmente, como verdadera

3. Explique conceptualmente si existe diferencia entre distribución muestral de un estadístico y distribución de la población.

Respuesta.-

Supongamos una variable aleatoria X con función de distribución F(x). Un estadístico es una función $g = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de una muestra aleatoria. Cada variable X_i tiene la misma función de distribución F(x), pero el estadístico g tiene, obviamente, otra distribución en general. Esta distribución puede obtenerse tomando todas las posibles muestras de tamaño n, calculando g para cada una y construyendo la distribución de esos valores.

4.- ¿Cuándo decimos que un estimador es suficiente?.

Respuesta.-

Un estimador $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es suficiente para un parámetro θ si la distribución de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ condicionada por T = t, no depende de θ.

Intuitivamente significa que el estimador contiene toda la información que proporciona la muestra sobre el parámetro θ y que ningún otro estimador proporciona más información.

PROBLEMAS

1. En un estudio reciente se observó que el 75% de los conductores utiliza el cinturón de seguridad. Si se selecciona una muestra aleatoria de 10 conductores, indicar:

a) ¿Cual sería la probabilidad de que exactamente 7 conductores llevasen puesto el cinturón?
b) ¿Cual sería la posibilidad de que lo llevasen puesto cinco o menos de cinco conductores?
c) En el caso de que la muestra fuese de 100 conductores, ¿cuál sería la probabilidad de que lo llevasen puesto más de 80 conductores?
d) Indicar que funciones de distribución se usan y por qué.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

Solución.-

a) La variable X = "nº de conductores que utilizan el cinturón de seguridad" es binomial B(10, 0,75). Así pues: P(X = 7) = $\binom{10}{7} 0{,}75^7 \cdot 0{,}25^3$ = *(tablas)* ≅ 0, 2503.

b) P(X≤ 5) = $\sum_{i=0}^{5} \binom{10}{i} 0{,}75^i \cdot 0{,}25^{10-i}$ = *(tablas)* = 0,0781.

c) La variable X es ahora binomial B(100, 0,75) que se distribuye aproximadamente como una normal $N\left(100 \cdot 0{,}75,\ \sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}\right) \cong N(75,\ 4{,}33)$. Se tendrá pues:

P[X > 80] = *(corrección por continuidad)* = P[X ≥ 80,5] = $P\left[Z \geq \frac{80{,}5 - 75}{4{,}33}\right] \cong$

≅ P[Z≥ 1,27] = *(tablas)* = 0,1020.

d) En los apartados a) y b) la variable X es binomial B(10, 0,75) pues llevar o no cinturón de seguridad es independiente de un conductor a otro. En el apartado c), puesto que n = 100 es grande, aplicamos el teorema de Moivre y usamos la distribución normal, con la correspondiente corrección por continuidad.

2.-Se ha demostrado que el número de pacientes atendidos mensualmente en un servicio de urgencias se distribuye normalmente con desviación típica de 36 pacientes. Con la información que aporte una muestra aleatoria extraída de este servicio de urgencias, se desea saber si el número medio de pacientes atendidos mensualmente es al menos 165 pacientes utilizando un 5% de significación; ¿Cuántos pacientes será necesario elegir para que la probabilidad del error de tipo II para 159 pacientes sea como mucho del 10%?.

Solución.-

Bajo la hipótesis nula H_0: $\mu \geq 165$, la variable $\frac{\overline{X} - 165}{36}\sqrt{n}$ es normal N(0, 1) y la región crítica para un 5% de significación es (tablas):

$$\frac{\overline{X} - 165}{36}\sqrt{n} < -1{,}64 \leftrightarrow \overline{X} < 165 - \frac{59{,}21}{\sqrt{n}}$$

Para la hipótesis alternativa H_1: $\mu = 159$, el error de tipo II es:

$$P\left[\overline{X} \geq 165 - \frac{59{,}21}{\sqrt{n}} \middle/ H_1\right] = P\left[Z \geq \frac{6 - \frac{59{,}21}{\sqrt{n}}}{36}\sqrt{n}\right] = P\left[Z \geq \frac{\sqrt{n}}{6} - 1{,}64\right] \leq 0{,}1$$

De las tablas se obtiene que debe ser $\frac{\sqrt{n}}{6} - 1{,}64 \geq 1{,}29$ → n ≥ 309,06. Así pues tomaremos n = 310.