e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

CURSO 2003/2004.	**JUNIO. 2ª semana**
Código de la Carrera 42	**Código de la Asignatura 209.**

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Indicar cual es la utilidad y el fundamento de la función generatriz de momentos.

Respuesta.-

La utilidad es 1) el cálculo de los momentos (respecto del origen) de la variable aleatoria y 2) la obtención de la distribución de la variable, ya que la función generatriz caracteriza la distribución (es decir, si dos variables X e Y tienen la misma función generatriz $g_X(t) = g_Y(t)$, entonces tienen la misma distribución).

Para que exista la función generatriz $g(t) = E[e^{xt}]$, debe ser convergente la serie $\sum_{\forall i} e^{x_i t} P(X = x_i)$ en el caso discreto, o la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)dx$ en el caso continuo.

2. Explicar conceptualmente la relación existente entre una distribución de Poisson y una Binomial.

Respuesta.-

Si X es binomial B(n, p) con n "grande" y p "pequeño", se demuestra que X se comporta aproximadamente como una variable Poisson de parámetro $\lambda = n \cdot p$. Es decir,:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

3. ¿Cual es la interpretación del concepto "grados de libertad" a la hora de utilizar estimadores?

Respuesta.-

El número de grados de libertad es el número de variables aleatorias muestrales <u>independientes</u> con las que construimos el estimador. Si, por ejemplo, para estimar σ^2 usamos la varianza muestral $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ para una muestra aleatoria de tamaño n, las n variables:

$$X_1 - \overline{X},\ X_2 - \overline{X},\ X_3 - \overline{X},\ \ldots\ldots,\ X_n - \overline{X}$$

no son independientes, ya que su suma es cero. Es decir, el número máximo de variables independientes entre ellas es de n – 1, que son los grados de libertad.

4. Explicar el concepto de estimador eficiente.

Respuesta.-

Un estimador es eficiente si es insesgado y su varianza es mínima es decir, que alcance la cota de Cramer-Rao:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \ln dF_n}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

PROBLEMAS

1.- La media de ventas de Líneas ADSL mensuales es de 12.000, con una desviación típica de 1.000 se nos pide con esta información que determinemos: a) La probabilidad de que las ventas mensuales estén comprendidas entre 10.000 y 14.000 líneas. b) Calcular el menor intervalo que incluya al menos el 95% de las ventas mensuales.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

Solución.-

a) Como desconocemos la distribución de la variable X = "nº de ventas mensuales de líneas ADSL", podemos aplicar la desigualdad de Chebychev:

$$P[|X-E(X)| < K] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}\ , \quad \text{o bien} \quad P[E(X) - K < X < E(X) + k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}$$

Para K = 2000 $\rightarrow$ $P[10000 < X < 14000] \geq 1 - \frac{10^6}{4 \cdot 10^6} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

b) $P[12000 - K < X < 12000 + K] \geq 1 - \frac{10^6}{K^2} = 0{,}95 \rightarrow K = \sqrt{\frac{10^6}{0{,}05}} \cong 4472{,}14$. El intervalo sería:

$$[7528,\ 16472]$$

2.- Si sabemos que los gastos en tecnología de la información de las grandes empresas europeas se distribuye como una normal N(90,4), calcular la probabilidad de que en una muestra de 20 empresas la varianza muestral sea superior a 4,33.

Solución.-

La variable $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye χ^2 con n–1 grados de libertad (teorema de Fisher). Se tendrá:

$$P[S^2 > 4{,}33] = P\left[\chi^2_{19} > \frac{19 \cdot 4{,}33}{16}\right] = P\left[\chi^2_{19} > 5{,}14188\right] = 0{,}999303 \cong 1.$$