e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

CURSO 2002/2003.	**SEPTIEMBRE. Reserva.**
Código de la Carrera 42	**Código de la Asignatura 209.**

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Explique conceptualmente cual es la utilidad del Teorema Central del Limite.

Respuesta.-

Permite calcular probabilidades de una variable aleatoria S_n, suma de un número elevado de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, ya que el teorema establece que dicha suma se comporta aproximadamente como una variable Normal cuyas media y varianza son la suma, respectivamente, de las medias y varianzas de las variables aleatorias cuya suma es S_n.

2. Explique la diferencia entre parámetro y estadístico.

Respuesta.-

Un parámetro es cualquier medida de posición o dispersión, o cualquier momento de una variable aleatoria de una población (por ejemplo, la media, la varianza, etc..). Es constante.

Un estadístico es una <u>función</u> de las variables aleatorias X_1, X_2, ..., X_n, que forman una muestra. Por ejemplo, la media muestral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, o la varianza muestral, etc. Es una variable aleatoria.

3. ¿Qué relación existe entre la varianza muestral y la distribución χ^2 de Pearson?

Respuesta.-

Si S^2 es la varianza muestral (tamaño n), en una población con varianza poblacional σ^2, entonces el estadístico $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ sigue una distribución χ^2 con n – 1 grados de libertad (teorema de Fisher).

4. Explicar conceptualmente qué mide la potencia de un contraste.

Respuesta.-

Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0. Si H_0 es cierta, entonces Potencia = = P[rechazar H_0/ H_0 cierta] = α (probabilidad del error de tipo I); si H_0 es falsa $\rightarrow$ Potencia = = P[rechazar H_0/ H_0 falsa] = 1 – P[aceptar H_0/ H_0 falsa] = 1 – β (donde β = probabilidad del error de tipo II)

PROBLEMAS

1.- Las ventas medias de una ferretería son de 6000 € a la semana con una desviación típica de 100 €. Se pide calcular con estos datos: **a)** La probabilidad de que las ventas medias semanales sean mayores de 6250 €. **b)** Definir el menor intervalo de tal forma que contenga al menos el 95% de las ventas medias semanales.

Solución.-

a) Como no conocemos la distribución de las ventas semanales, la desigualdad de Chebychev nos proporcionará una cota de la probabilidad pedida.

Sea X la variable aleatoria "ventas medias semanales". Se tendrá:

$P[X > 6250] = P[X - 6000 > 250] \leq P[\,|X - 6000| > 250 \leq$ *(teorema de Chebychev)* $\leq$

$\leq \frac{10000}{62500} = 0{,}16$.

Es decir, la probabilidad pedida no supera a 0,16.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm/

b) La desigualdad de Chebychev $P\left[\left|X-\mu\right|<K\right]>1-\dfrac{\sigma^2}{K^2}$ podemos escribirla equivalentemente $P\left[\mu-K<X<\mu+K\right]>1-\dfrac{\sigma^2}{K^2}$. Haciendo $1-\dfrac{10000}{K^2}=0{,}95$ se obtiene $K \cong 447{,}21$. Luego [5552,79; 6447,21] es el menor intervalo que contiene al menos el 95% de las ventas medias semanales

2.- El gasto medio por hogar, en España, en Artículos de vestir y calzado para el año 2000 se distribuye según una Normal con desviación típica de 2108,51 €. De una muestra aleatoria de 100 familias se obtuvo un gasto medio de 1.484,87 €. **a)** Determinar los intervalos de confianza del 90% y del 95% para el gasto medio por hogar en Artículos de vestir y calzado. **b)** Calcular el tamaño de la muestra necesario para obtener un intervalo de confianza del 90%, para el gasto medio por hogar en Artículos de vestir y calzado, con una amplitud de 500 €.

Solución.-

a) De las tablas se obtiene que P[–1,65 ≤ Z ≤ 1,65] = 0,9 → $-1{,}65 \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \le 1{,}65$ $\leftrightarrow \dfrac{-1{,}65\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{X} \le \mu \le \dfrac{1{,}65\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{X} \rightarrow$ sustituyendo se obtiene el intervalo: [1136,97 ; 1832,77].

Análogamente, de las tablas se obtiene que P[–1,96 ≤ Z ≤ 1,96] = 0,95 → $-1{,}96 \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \le 1{,}96 \leftrightarrow \dfrac{-1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{X} \le \mu \le \dfrac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{X} \rightarrow$ sustituyendo se obtiene el intervalo: [1071,60 ; 1898,14].

b) Pongamos $-1{,}65 \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \le 1{,}65 \leftrightarrow \dfrac{-1{,}65\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{X} \le \mu \le \dfrac{1{,}65\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{X}$. La amplitud del intervalo es $2\dfrac{1{,}65\sigma}{\sqrt{n}}$, luego deberá ser $2\dfrac{1{,}65\sigma}{\sqrt{n}} \le 500$, de donde se obtiene $\sqrt{n} \ge 13{,}9161 \rightarrow$ $n \ge 193{,}66$. Luego tomaremos n = **194**.